Recherche d'une racine simple par la méthode de bissection ou dichotomie

Manuel LUQUE

29 octobre 2012

En essayant de dessiner une mosaïque vue sur une maison de Brionne, uniquement constituée d'arcs de cercle -à part le contour, je me suis aperçu qu'il y avait beaucoup de calculs à faire ! J'aurais pu confier la résolution des différentes équations à un logiciel spécialisé, mais je me suis souvenu que j'avais déjà réalisé, en août 2003, une série de macros qui justement permettaient de trouver et d'afficher la solution d'une équation dans une intervalle donné :

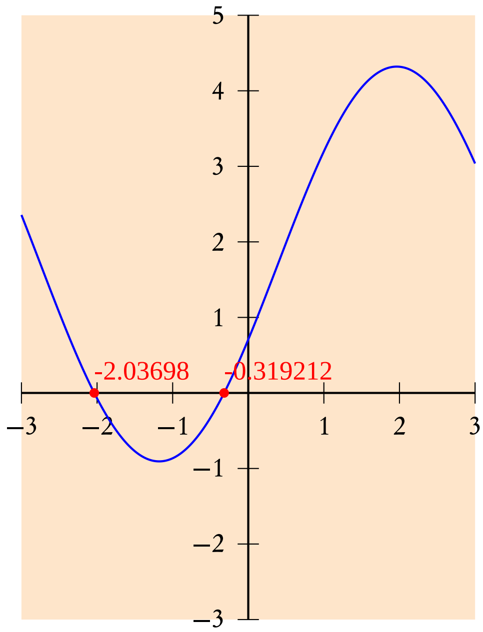
`http://melusine.eu.org/syracuse/mluque/dichotomie/`

Comme Herbert Voss a repris la méthode d'affichage des valeurs dans le package `pst-tools` en lui apportant quelques améliorations comme le choix de la fonte des nombres, j'ai uniquement réécrit la macro dédiée au calcul d'une solution et j'ai utilisé la package `pst-tools` pour l'affichage.

La macro `\psSolve[options](t1,t2)(f(t),t){nom}` permet de calculer une solution de l'équation `f(t)=0` dans l'intervalle `[t1,t2]`. La fonction peut-être écrite en mode algébrique avec l'option `[algebraic]` et sa variable doit être précisée après la virgule : on peut choisir celle que l'on veut $(t, x, y \ldots)$. Le dernier paramètre indiquera le nom de la variable `postscript` dans laquelle sera stocké le résultat pour une utilisation ultérieure.

Le package pst-node est utilisé pour l'écriture de la commande, ce qui permet de sauvegarder le point correspondant avec un nom fixé par avance, `(I)`[1]. Pour afficher sur le graphique le point correspondant à la racine, il suffira d'écrire, `\psdot(I)`.

C'est une macro très rudimentaire et il faut avoir une idée de l'intervalle où peut se trouver une solution. Pour cela, on trace, évidemment, le graphe de la fonction.



Valeurs calculées avec Maple : -2.036983004, -0.3192114863

```
\begin{pspicture}(-3,-3)(3,5)
\def\Fonction{(1+sqrt(2))*sin(x)-cos(x)+(2+sqrt(2))/2}
\psframe*[linecolor=screen](-3,-3)(3,5)
\psaxes(0,0)(-3,-3)(3,5)
\psplot[plotpoints=360,algebraic,linecolor=blue]{-3}{3}{\Fonction}
\psSolve[algebraic](-1.57,0)(\Fonction,x){S1}
\psdot[linecolor=red](I)
\uput[u](I){\psPrintValue[dot=false,linecolor=red]{S1}}
\psSolve[algebraic](-2,-3)(\Fonction,x){S2}
```

[1]Bien sûr, on pourrait prévoir le choix de ce nom, mais je ne l'ai pas fait pour ne pas alourdir la macro.

```
\psdot[linecolor=red](I)
\uput[u](I){\psPrintValue[dot=false,linecolor=red]{S2}}
\end{pspicture}

\def\Fonction{(1+sqrt(2))*sin(t)-cos(t)+(2+sqrt(2))/2}
\psSolve[algebraic](-1.57,0)(\Fonction,t){I3}
$t=\psPrintValue[dot=false]{I3}$
```

t =-0,319212 radian

S'il n'y a pas de racine dans l'intervalle choisi, la macro donne la dernière valeur de l'intervalle.

Une précision importante : si on emploie des fonctions trigonométriques l'option `[algebraic]` nécessite de travailler en radians. Par contre si on utilise la notation postscript il faut employer des degrés.

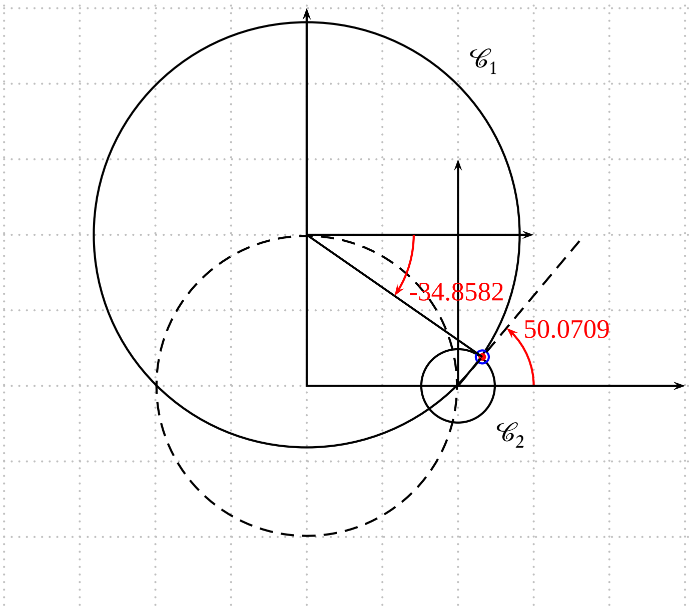
```
%cos(t)-sin(t)=(-r^2+R1^2-2*R0^2)/(2*r*R0)
\def\Fonction{x cos x sin sub
              r0 dup mul
              R0 dup mul 2 mul add
              R1 dup mul sub 2 r0 mul R0 mul div add}
\psSolve(0,90)(\Fonction,x){I1}
$x=\psPrintValue{I1}$
```

x =50,0709 degrés

```
\def\Fonction{x cos x sin sub
              r0 dup mul neg R0 dup mul 2 mul add
              R1 dup mul add 2 R1 mul R0 mul div sub}
\psSolve(-45,0)(\Fonction,x){I2}
$x=\psPrintValue{I2}$
```

x =-34,8582 degrés

Pour construire la mosaïque, il faut calculer l'intersection d'un certain nombre de cercles. Voici pour le premier point, qu'il faut calculer, pour voir tracer précisément les arcs de cercle, dans le repère lié à chacun des cercles, en conséquence deux calculs sont nécessaires. Déterminons l'intersection utile des cercles $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$.



$$\left\{\begin{array}{l} x_1 = R_1\cos t_1 \\ y_1 = R_1\sin t_1 + R_0 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} x_2 = r\cos t_2 + R_0 \\ y_2 = r\sin t_2 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} R_1\cos t_1 = r\cos t_2 + R_0 \\ R_1\sin t_1 + R_0 = r\sin t_2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \cos t_1 = \dfrac{r\cos t_2 + R_0}{R_1} \\ \sin t_1 = \dfrac{r\sin t_2 - R_0}{R_1} \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} \cos^2 t_1 + \sin^2 t_1 = 1 \\ R_1^2 = (r\cos t_2 + R_0)^2 + (r\sin t_2 - R_0)^2 \end{cases} \Longrightarrow R_1^2 = r^2 + 2R_0^2 + 2rR_0(\cos t_2 - \sin t_2)$$

$$\cos t_2 - \sin t_2 = \frac{R_1^2 - r^2 - 2R_0^2}{2rR_0}$$

Cette équation a été précédemment résolue avec \psSolve. On peut donc tracer l'arc correspondant :

```
\def\Fonction{x cos x sin sub r0 dup mul
              R0 dup mul 2 mul add R1 dup mul sub
              2 r0 mul R0 mul div add}
\psSolve(0,90)(\Fonction,x){I1}
\psarc[linecolor=red]{->}(!R0 0){!r0}{0}{!I1}
```

On opère de même pour $\mathscr{C}_1$:

```
\def\Fonction{cos(t)-sin(t)-(R1^2+2*R0^2-r0^2)/(2*R1*R0)}
\psSolve[algebraic](-0.9,0)(\Fonction,t){I2}
```

t =-0,608391 radian =-34,8582 degrés. Ce qui permet de tracer l'arc correspondant :

```
\psarc(!0 R0){!R1}{!I2}{0}
```

t =1,10461 radian

Les points suivants, définissant le motif se calculent, aisément :

$$\begin{cases} x_1 = R_1\cos t_1 \\ y_1 = R_1\sin t_1 + R_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = R_1\cos t_2 + \frac{R_1}{2} \\ y_2 = R_1\sin t_2 - \frac{R_1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_1\cos t_1 = R_1\cos t_2 + \dfrac{R_1}{2} \\ R_1\sin t_1 + R_0 = R_1\sin t_2 - \dfrac{R_1}{2} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \cos t_1 = \cos t_2 + \dfrac{1}{2} \\ \sin t_1 = \sin t_2 - \dfrac{1+\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos^2 t_1 + \sin^2 t_1 = 1 \\ 1 = 1 + \cos t_2 + \dfrac{1}{4} - (1+\sqrt{2})\sin t_2 + \dfrac{(1+\sqrt{2})^2}{4} \end{cases} \Longrightarrow 0 = \cos t_2 - (1+\sqrt{2})\sin t_2 + \frac{2+\sqrt{2}}{2}$$

Pour t_1 :

$$\begin{cases} \cos t_2 = \cos t_1 - \dfrac{1}{2} \\ \sin t_2 = \sin t_1 + \dfrac{1+\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos^2 t_2 + \sin^2 t_2 = 1 \\ 1 = 1 + -\cos t_1 + \dfrac{1}{4} + (1+\sqrt{2})\sin t_1 + \dfrac{(1+\sqrt{2})^2}{4} \end{cases} \Longrightarrow 0 = -\cos t_1 + (1+\sqrt{2})\sin t_1 + \frac{2+\sqrt{2}}{2}$$

$t_1 = -18.28947093$

$$\begin{cases} x_1 = r\cos t_1 + \frac{R_1}{2} \\ y_1 = r\sin t_1 + \frac{R_1}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = R_1\cos t_2 + \frac{R_1}{2} \\ y_2 = R_1\sin t_2 - \frac{R_1}{2} \end{cases}$$

$t_2 = 79.85820665$

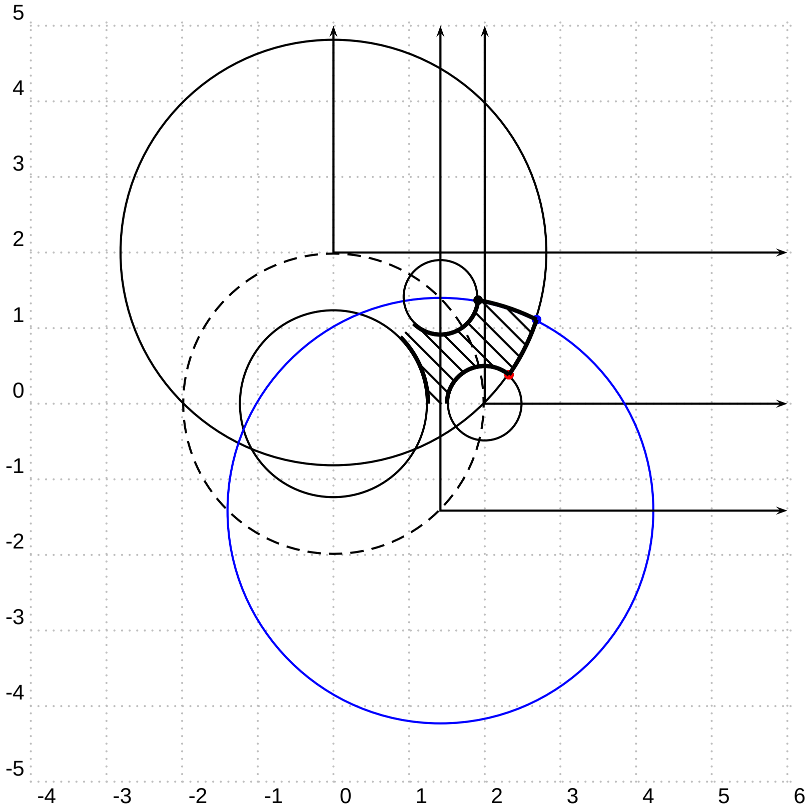
$$\begin{cases} \cos t_1 = \dfrac{R_1}{r}\cos t_2 \\ \sin t_1 = \dfrac{R_1}{r}(\sin t_2 - 1) \end{cases}$$

$$1 = 2\left(\frac{R_1}{r}\right)^2 (1 - \sin t_2)$$

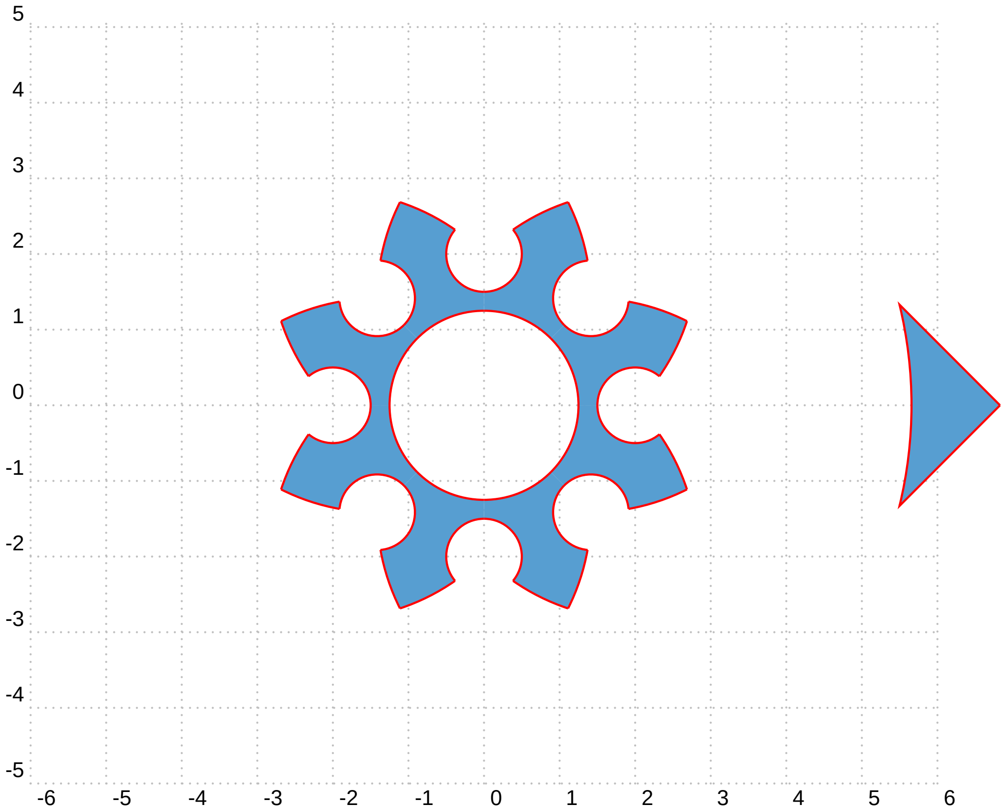
$$\begin{cases} \cos t_2 = \dfrac{r}{R_1}\cos t_1 \\ \sin t_2 = \dfrac{r}{R_1}\sin t_1 + 1 \end{cases}$$

$$\sin t_1 = -\frac{1}{2}\frac{r}{R_1}$$

$t_1 = -5.070896683$



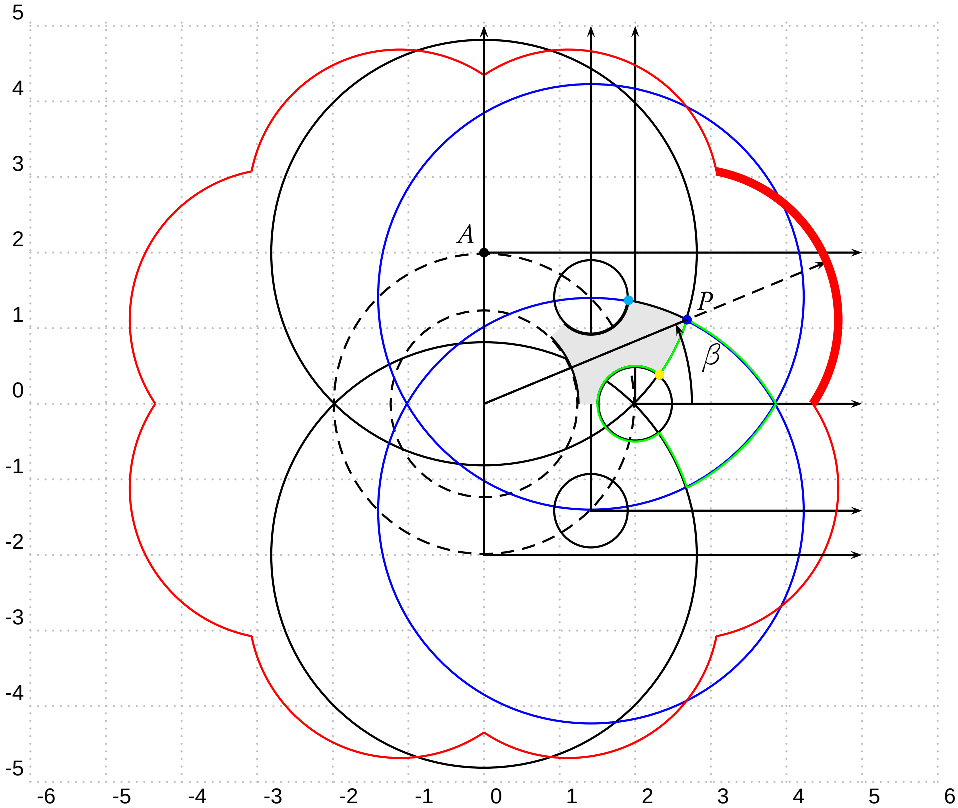

```
\def\Fonction{x cos x sin sub
             r0 dup mul R0 dup mul 2 mul add R1 dup mul sub
             2 r0 mul R0 mul div add}
\psSolve(0,90)(\Fonction,x){I1}
\pnode(!R0 r0 I1 cos mul add r0 I1 sin mul){P1}
\def\Fonction{x cos x sin sub
              r0 dup mul neg R0 dup mul 2 mul add R1 dup mul add
              2 R1 mul R0 mul div sub}
\psSolve(-45,0)(\Fonction,x){I2}
\pnode(!R1 I2 cos mul R0 R1 I2 sin mul add){P2}
\def\Fonction{x cos 1 2 sqrt add x sin mul sub
              2 sqrt 2 add 2 div add}
\psSolve(0,90)(\Fonction,x){I3}
%-cos(t)+(1+sqrt(2))*sin(t)+a1
\def\Fonction{x cos neg 1 2 sqrt add x sin mul add
              2 sqrt 2 add 2 div add}
\psSolve(-45,0)(\Fonction,x){I4}
%2*(R1/r)^2*(1-sin(t))=1
\def\Fonction{2 R1 r0 div dup mul mul 1 x sin sub mul 1 sub}
\psSolve(0,90)(\Fonction,x){I5}
%sin(t)=-r/2/R1
\def\Fonction{x sin r0 2 div R1 div sub}
\psSolve(-10,0)(\Fonction,x){I6}
```




```
\begin{pspicture}[showgrid](-6,-5)(6,5)
\pstVerb{/r0 0.5 def
         /R0 2 def
         /R1 R0 2 sqrt mul def
         /r1 R0 2 div 1.25 mul def}%
\calculs
\multido{\i=0+45}{8}{
    \rput{\i}(0,0){\pscustom[fillstyle=solid,%
                    fillcolor={[rgb]{0.22 0.36 0.47}},linestyle=none]{\motifB}}
    \rput{\i}(0,0){\motifA}}
\end{pspicture}
```

Le coin :

```
\def\Fonction{2*x^2-2*(2+sqrt(2))*R0*x+(2+sqrt(2))^2*R0^2-8*R0^2}
\psSolve[algebraic](4,6)(\Fonction,x){I7}
\psPrintValue{I7}
\psSolve[algebraic](1,2)(\Fonction,x){I8}
\psPrintValue{I8}
\def\Fonction{2*sqrt(2)*R0*cos(t)-I7}
\psSolve[algebraic](0,5)(\Fonction,t){I9}
\psPrintValue{I9}
```



Le contour ondulé rouge :

Coordonnées du point P :

$$\begin{cases} x_P = R_1 \cos\alpha \\ y_P = R_1 \sin\alpha + R_0 \end{cases}$$

α a déjà été calculé et est stocké dans la variable postscript I_4. $\alpha = -18.28947^o$.

Cercle de centre P et de rayon R_0 :

$$\begin{cases} x = R_0 \cos t + x_P = R_0 \cos t + R_1 \cos\alpha \\ y = R_0 \sin t + y_P = R_0 \sin t + R_1 \sin\alpha + R_0 \end{cases}$$

Intersection de ce cercle avec $y = 0$:

$$R_0 \sin t_0 = -R_1 \sin\alpha - R_0 \Longrightarrow \sin t_0 = -\frac{(R_1 \sin\alpha + R_0)}{R_0}$$

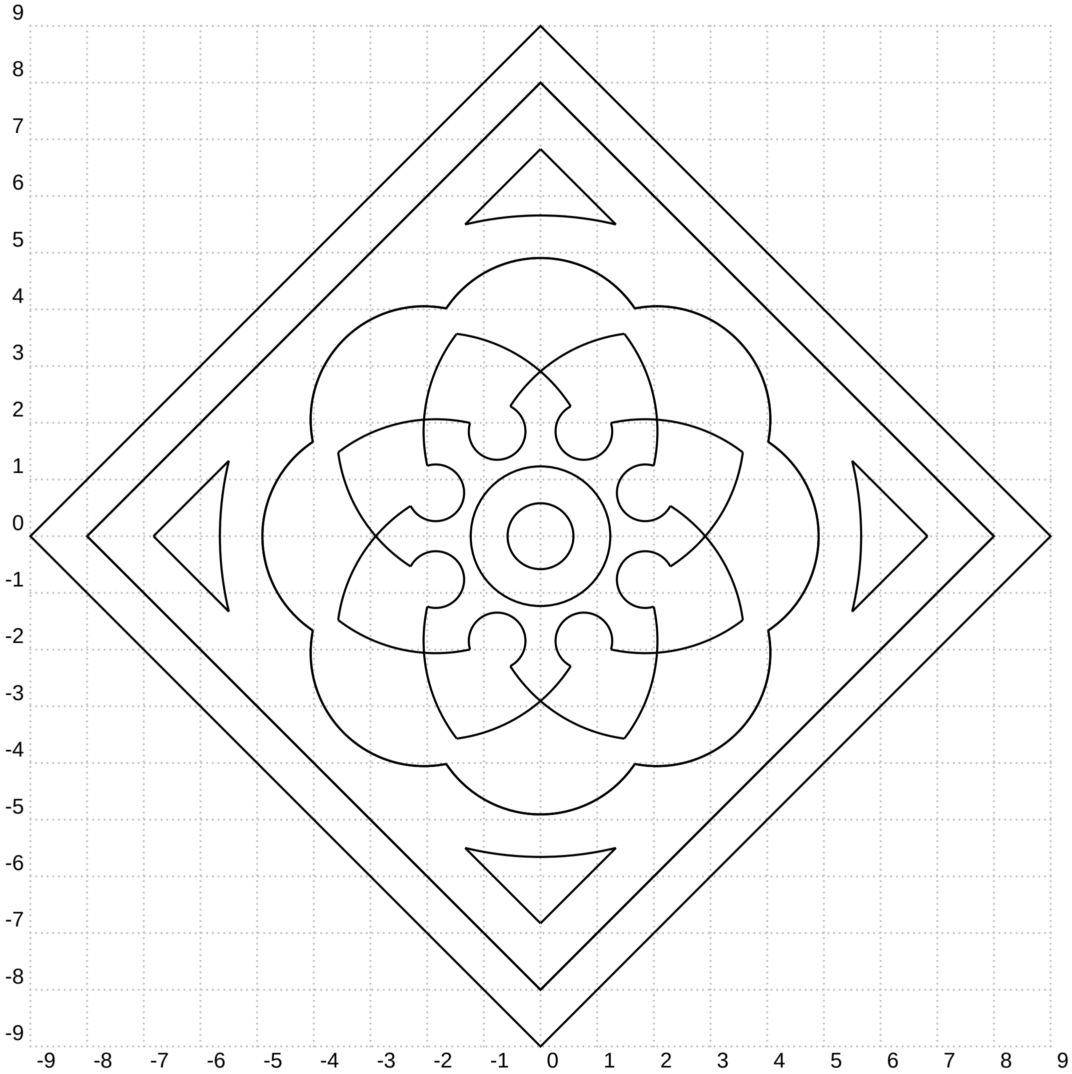
Calcul de t_0 :

```
\def\Fonction{x sin R1 I4 sin mul R0 add R0 div add}
\psSolve(-40,0)(\Fonction,x){I10}
\psPrintValue{I10}
```

t_0 =-33,793

Calcul de β :

$$\beta = \arctan\frac{y_P}{x_P} \text{ =22,5}$$


9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
-6
-7
-8
-9
-9 -8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9