Courbes de poursuite : étude théorique

gilg@acrotex.net

17 novembre 2020

1 Courbe de poursuite rectiligne

Le maître (m) d'un chien (c) court le long d'une droite (axe Oy) avec comme point de départ $O(0,0)$. Le chien le poursuit en le gardant en point de mire.
Rapport k entre la vitesse du chien et celle du maître : $k = \frac{v_c}{v_m}$

1.1 Calculs

Le maître parcourt une droite suivant l'axe Oy :

$$\vec{x}_m = v_m \cdot t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Son vecteur vitesse est :

$$\vec{v}_m = v_m \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La vitesse est donc v_m.
La position du chien est :

$$\vec{x}_c = \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \end{pmatrix}$$

Son vecteur vitesse est :

$$\vec{v}_c = \begin{pmatrix} \dot{x}_c \\ \dot{y}_c \end{pmatrix}$$

La vitesse est donc $v_c = \sqrt{\dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2}$.
Pour ce problème de poursuite, la direction du chien est $\vec{d} = \vec{x}_m - \vec{x}_c$, c'est aussi la direction du vecteur-vitesse du chien $\vec{v}_c$.

$$\vec{d} = \vec{x}_m - \vec{x}_c = \begin{pmatrix} -x_c \\ v_m t - y_c \end{pmatrix}$$

Si l'on prend les normes des vecteurs $\vec{d_0}$ et $\vec{v}_{c0}$, celles-ci doivent être egales : $\vec{d_0} = \vec{v}_{c0}$

$$\frac{1}{\sqrt{x_c^2 + (v_m t - y_c)^2}} \begin{pmatrix} -x_c \\ v_m t - y_c \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{\dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2}} \begin{pmatrix} \dot{x}_c \\ \dot{y}_c \end{pmatrix}$$

En prenant $v_c = \sqrt{\dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2}$ on a :

$$\dot{x}_c = v_c \frac{-x_c}{\sqrt{x_c^2 + (v_m t - y_c)^2}}$$
$$\dot{y}_c = v_c \frac{v_m t - y_c}{\sqrt{x_c^2 + (v_m t - y_c)^2}}$$

Avec $k = \frac{v_c}{v_m}$ on a :

$$\dot{x}_c = k v_m \frac{-x_c}{\sqrt{x_c^2 + (v_m t - y_c)^2}}$$
$$\dot{y}_c = k v_m \frac{v_m t - y_c}{\sqrt{x_c^2 + (v_m t - y_c)^2}}$$

On ne diminue pas la généralité du problème si l'on pose $v_m = 1$ – le maître court avec une vitesse constante. Finalement on a pour le système d'équations différentielles du chien :

$$\dot{x}_c = -k\frac{x_c}{\sqrt{x_c^2+(t-y_c)^2}}$$
$$\dot{y}_c = k\frac{t-y_c}{\sqrt{x_c^2+(t-y_c)^2}}$$

La courbe du maître :

$$x_m = 0$$
$$y_m = t$$

1.1.1 Le temps en cas $k > 1$

Si $k \leq 1$ le chien ne rattrape jamais son maître. Pour le cas $k > 1$ on calcule le temps pour lequel chien et maître ont les mêmes coordonnées : $\vec{x}_c = \vec{x}_m$
On a :

$$\dot{x}_c = kv_m\frac{-x_c}{\sqrt{x_c^2+(v_m t-y_c)^2}} \tag{1}$$
$$\dot{y}_c = kv_m\frac{v_m t-y_c}{\sqrt{x_c^2+(v_m t-y_c)^2}} \tag{2}$$

On divise (2) : (1) et substitue les coordonnées $x_c = x$ et $y_c = y$:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{v_m t - y}{x} \tag{3}$$

On calcule pour $v_m t$:

$$v_m t = y - x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

Puis on fait $\mathrm{d}/\mathrm{d}x$

$$v_m\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - x\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = -x\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$$

Avec $\mathrm{d}t/\mathrm{d}x = 1/(\mathrm{d}x/\mathrm{d}t)$

$$-\frac{v_m}{kv_m}\frac{\sqrt{x^2+(v_m t-y)^2}}{x} = -x\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$$

On simplifie :

$$\frac{1}{k}\sqrt{1+\left(\frac{v_m t-y}{x}\right)^2} = x\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$$

On substitue avec (3) : $\frac{v_m t-y}{x} = -\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$

$$\frac{1}{k}\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2} = x\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$$

Puis on substitue $u = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$

$$\sqrt{1+u^2} = kx\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

On sépare les variables :

$$\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1+u^2}} = \frac{1}{k}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

On intègre :

$$\sinh^{-1}(u) = \ln x^{\frac{1}{k}} + C$$

Le chien a pour coordonnées initiales (a, b) et sa pente $u = \frac{b}{a}$. On calcule pour C

$$\sinh^{-1}(\frac{b}{a}) = \ln a^{\frac{1}{k}} + C \quad \Rightarrow \quad C = \ln\left(\frac{b}{a} + \sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)^2 + 1}\right) - \ln a^{\frac{1}{k}}$$

Alors :

$$\sinh^{-1}(u) = \ln\left(\frac{b}{a} + \sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)^2 + 1}\right) \cdot \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{k}}$$

On substitue $v = \sinh^{-1}(u)$, alors $u = \sinh(v) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{v} - \mathrm{e}^{-v})$

$$u = \frac{\left(\sqrt{\frac{b^2}{a^2} + 1} + \frac{b}{a}\right)\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{k}} - \frac{1}{\left(\sqrt{\frac{b^2}{a^2}+1}+\frac{b}{a}\right)\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{k}}}}{2}$$

On resubstitue $u = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ et on intégre :

$$y = y(x) = \frac{\left(\sqrt{\frac{b^2}{a^2} + 1} + \frac{b}{a}\right)x^{\frac{1}{k}+1}}{2\left(\frac{1}{k} + 1\right)a^{\frac{1}{k}}} - \frac{a^{\frac{1}{k}}x^{1-\frac{1}{k}}}{2\left(\sqrt{\frac{b^2}{a^2} + 1} + \frac{b}{a}\right)\left(1 - \frac{1}{k}\right)} + C$$

Le chien a pour coordonnées initiales (a, b). On calcule pour C

$$b = \frac{\sqrt{a^2 + b^2} + b}{2\left(1 + \frac{1}{k}\right)} - \frac{a^2}{2\left(1 - \frac{1}{k}\right)\left(\sqrt{a^2 + b^2} + b\right)} + C$$

Alors :

$$C = b + \frac{a^2}{2\left(1 - \frac{1}{k}\right)\left(\sqrt{a^2 + b^2} + b\right)} - \frac{\sqrt{a^2 + b^2} + b}{2\left(1 + \frac{1}{k}\right)}$$

Puis :

$$y = y(x) = \frac{\left(\sqrt{\frac{b^2}{a^2} + 1} + \frac{b}{a}\right)x^{\frac{1}{k}+1}}{2\left(\frac{1}{k} + 1\right)a^{\frac{1}{k}}} - \frac{a^{\frac{1}{k}}x^{1-\frac{1}{k}}}{2\left(\sqrt{\frac{b^2}{a^2} + 1} + \frac{b}{a}\right)\left(1 - \frac{1}{k}\right)} + b + \frac{a^2}{2\left(1 - \frac{1}{k}\right)\left(\sqrt{a^2 + b^2} + b\right)} - \frac{\sqrt{a^2 + b^2} + b}{2\left(1 + \frac{1}{k}\right)}$$

Le chien ratrappe son maître si ses coordonnées sont égaux $y(0) = y_m$:

$$y(0) = b + \frac{a^2}{2\left(1 - \frac{1}{k}\right)\left(\sqrt{a^2 + b^2} + b\right)} - \frac{\sqrt{a^2 + b^2} + b}{2\left(1 + \frac{1}{k}\right)} = v_m \cdot t$$

Le temps est :

$$t = \frac{b + \frac{a^2}{2\left(1-\frac{1}{k}\right)\left(\sqrt{a^2+b^2}+b\right)} - \frac{\sqrt{a^2+b^2}+b}{2\left(1+\frac{1}{k}\right)}}{v_m}$$

Quand nous avons pris $v_m = 1$ on calcule pour le temps $k > 1$:

$$t = b + \frac{a^2}{2\left(1 - \frac{1}{k}\right)\left(\sqrt{a^2 + b^2} + b\right)} - \frac{\sqrt{a^2 + b^2} + b}{2\left(1 + \frac{1}{k}\right)}$$

Calculer le temps avec une macro :

```
\newcommand{\letemps}[3]{%
%% a = x coordonnée du chien au départ
%% b = y coordonnée du chien au départ
%% k = vc/vm rapport des vitesses du chien et maître
\xintdefiivar a, b, k := #1, #2, #3;%
\xintDigits:=3\relax
Pour $a=\xintexpr a\relax$, $b=\xintexpr b\relax $, $k=\xintfloatexpr k\relax$ on calcule pour le temps :

\xintDigits:=5\relax
$t=\xintfloateval{b+(a^2)/(2*(1-1/k)*(sqrt(a^2+b^2)+b))-(sqrt(a^2+b^2)+b)/(2*(1+1/k))}\,\textrm{s}$
}
```

$t = 11.495\,\mathrm{s}$

2 Courbe de poursuite circulaire

Le maître (m) d'un chien (c) court le long d'un cercle $O(0,0)$, $R > 0$. Encore une fois le chien le poursuit en le gardant en point de mire.
Rapport k entre la vitesse du chien et celle du maître : $k = \frac{v_c}{v_m}$

2.1 Calculs

Le maître parcourt un cercle du rayon R :

$$\vec{x}_m = R\begin{pmatrix}\cos\omega t\\ \sin\omega t\end{pmatrix}$$

Son vecteur-vitesse est :

$$\vec{v}_m = R\omega\begin{pmatrix}-\sin\omega t\\ \cos\omega t\end{pmatrix}$$

La vitesse est donc $v_m = R\omega$.
Position du chien est :

$$\vec{x}_c = \begin{pmatrix}x_c\\ y_c\end{pmatrix}$$

Son vecteur-vitesse est :

$$\vec{v}_c = \begin{pmatrix}\dot{x}_c\\ \dot{y}_c\end{pmatrix}$$

La vitesse est donc $v_c = \sqrt{\dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2}$.
Pour ce problème de poursuite, la direction et sens du mouvement du chien est suivant $\vec{d} = \vec{x}_m - \vec{x}_c$, c'est aussi ceux du vecteur de vitesse du chien $\vec{v}_c$.

$$\vec{d} = \vec{x}_m - \vec{x}_c = \begin{pmatrix}R\cos\omega t - x_c\\ R\sin\omega t - y_c\end{pmatrix}$$

Si l'on prend les normes des vecteurs $\vec{d}_0$ et $\vec{v}_{c0}$, celles-ci doivent être égales : $\vec{d}_0 = \vec{v}_{c0}$

$$\frac{1}{\sqrt{(R\cos\omega t - x_c)^2 + (R\sin\omega t - y_c)^2}}\begin{pmatrix}R\cos\omega t - x_c\\ R\sin\omega t - y_c\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{\dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2}}\begin{pmatrix}\dot{x}_c\\ \dot{y}_c\end{pmatrix}$$

En prenant $v_c = \sqrt{\dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2}$ on a :

$$\dot{x}_c = v_c\frac{R\cos\omega t - x_c}{\sqrt{(R\cos\omega t - x_c)^2 + (R\sin\omega t - y_c)^2}}$$
$$\dot{y}_c = v_c\frac{R\sin\omega t - y_c}{\sqrt{(R\cos\omega t - x_c)^2 + (R\sin\omega t - y_c)^2}}$$

Avec $k = \frac{v_c}{v_m}$ on a :

$$\dot{x}_c = k v_m \frac{R\cos\omega t - x_c}{\sqrt{(R\cos\omega t - x_c)^2 + (R\sin\omega t - y_c)^2}}$$
$$\dot{y}_c = k v_m \frac{R\sin\omega t - y_c}{\sqrt{(R\cos\omega t - x_c)^2 + (R\sin\omega t - y_c)^2}}$$

Puis on remplace $v_m = R\omega$:

$$\dot{x}_c = kR\omega \frac{R\cos\omega t - x_c}{\sqrt{(R\cos\omega t - x_c)^2 + (R\sin\omega t - y_c)^2}}$$
$$\dot{y}_c = kR\omega \frac{R\sin\omega t - y_c}{\sqrt{(R\cos\omega t - x_c)^2 + (R\sin\omega t - y_c)^2}}$$

Comme précédemment, on ne restreint pas ma généralité du problème en posant $\omega = 1$ – le maître court avec une vitesse constante. Finalement on a pour le système d'équations différentielles du chien :

$$\dot{x}_c = kR \frac{R\cos t - x_c}{\sqrt{(R\cos t - x_c)^2 + (R\sin t - y_c)^2}}$$
$$\dot{y}_c = kR \frac{R\sin t - y_c}{\sqrt{(R\cos t - x_c)^2 + (R\sin t - y_c)^2}}$$

2.2 Le rayon final du chien

Rapport k entre la vitesse du chien et celle du maître : $k = \frac{v_c}{v_m}$
Pour le cas $k < 1$, le chien est plus lent que son maître. Pour $t \mapsto \infty$, les deux parcourent des cercles avec la même vitesse angulaire ω et donc le même temps T pour une révolution.
Si le maître parcourt un cercle de rayon R, le chien parcourt un cercle de rayon R_∞.
Pour le maître :

$$T_m = \frac{2\pi R}{v_m}$$

Pour le chien :

$$T_c = \frac{2\pi R_\infty}{v_c}$$

Le temps est égal : $T_m = T_c$

$$\frac{2\pi R}{v_m} = \frac{2\pi R_\infty}{v_c} \quad \Rightarrow \quad R_\infty = \frac{v_c}{v_m} R = k \cdot R < R$$