Engrenages pour un planétaire

manuel.luque27@gmail.com

27 avril 2020

Dans son document, l'auteur du site : Astronomie et planétaire géocentrique, explique au chapitre 4 : Choix des engrenages, comment déterminer les nombres de dents des roues d'un train d'engrenage.
Le principe est connu, par exemple l'auteur cite la rénovation de l'horloge astronomique de la cathédrale de Strasbourg, au XIX$^{\text{ième}}$ siècle, par Jean-Baptiste Schwilgué. Je relève dans le livre de ce dernier "*Description abrégée de l'horloge astronomique de la cathédrale de Strasbourg*" la phrase suivante : « *La sphère opère sa révolution d'orient en occident dans un jour sidéral, c'est-à-dire dans l'intervalle entre les retours successifs d'une même étoile au méridien ; durée plus courte d'environ 3 minutes 56 secondes que celle du jour solaire moyen.* » et aussi,encore un exemple, sur le site :
`http://www.ens-lyon.fr/RELIE/Cadrans/Musee/HorlogesAstro/Lyon/Cathedrale.htm`
« *L'alidade doit accomplir un tour en 1 jour solaire moyen de 24 heures, pendant que l'araignée accomplit un tour en 1 jour sidéral de 23 heures 56 minutes et 4 secondes. Autrement dit, pour 365,25 tours de l'alidade (portant le soleil), l'araignée (portant les étoiles) fait 366,25 tours.* » L'auteur du site "Astronomie et planétaire géocentrique" utilise les données plus précises de : `http://www.imcce.fr/langues/fr/ephemerides/` : année sidérale = 365,256 363 004 j.
En ce qui concerne les explications, tout ce qui suit est une paraphrase des celles de l'auteur du site cité.
Le rapport de transmission de l'engrenage doit être très proche de $r = \dfrac{365.256363004}{366.256363004} = 0.9972696720084312$.
L'auteur décompose les calculs en 2 étapes :

1. choix du nombre rationnel approché ;
2. choix du train d'engrenage.

Pour la première étape, il propose d'abord une méthode « manuelle » puis informatique. Son document est très bien expliqué et l'outil informatique utilisé est MATLAB. Pour illustrer ce document-ci, les calculs seront faits avec le package xint de Jean-François Burnol qui n'a rien a envier aux logiciels de calculs commerciaux.

$$\frac{365256363004}{366256363004}=0+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{365+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{9+\cfrac{1}{13+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{8+\cfrac{1}{1+\frac{1}{7}}}}}}}}}}}}}}}}}}$$

$$\frac{365256363004}{366256363004}\rightarrow 0\ 1\ \frac{365}{366}\ \frac{1096}{1099}\ \frac{1461}{1465}\ \frac{14245}{14284}\ \frac{186646}{187157}\ \frac{200891}{201441}\ \frac{990210}{992921}\ \frac{3171521}{3180204}\ \frac{7333252}{7353329}\ \frac{10504773}{10533533}\ \frac{70361890}{70554527}\ \frac{221590443}{222197114}\ \frac{956723662}{959342983}\ \frac{1178314105}{1181540097}\ \frac{10383236502}{10411663759}\ \frac{11561550607}{11593203856}\ \frac{91314090751}{91564090751}$$

Nous avons tous les rationnels possibles en fonction de la précision. L'auteur du document de référence a choisi le rapport $r=\dfrac{14245}{14284}=0.9972696723606833$, dont les 9 chiffres après la virgule coïncident avec le rapport théorique souhaité. Il reste à déterminer un choix d'engrenages avec des nombres de dents peu élevés. Pour cela il utilise la décomposition en un produit de facteurs premiers du numérateur et du dénominateur.

$$14283=14245,5,1,7,1,11,1,37,1 \quad ; \quad 14284=14284,2,2,3571,1$$

$$14245=35\times 11\times 37 \quad ; \quad 14284=4\times 3571$$

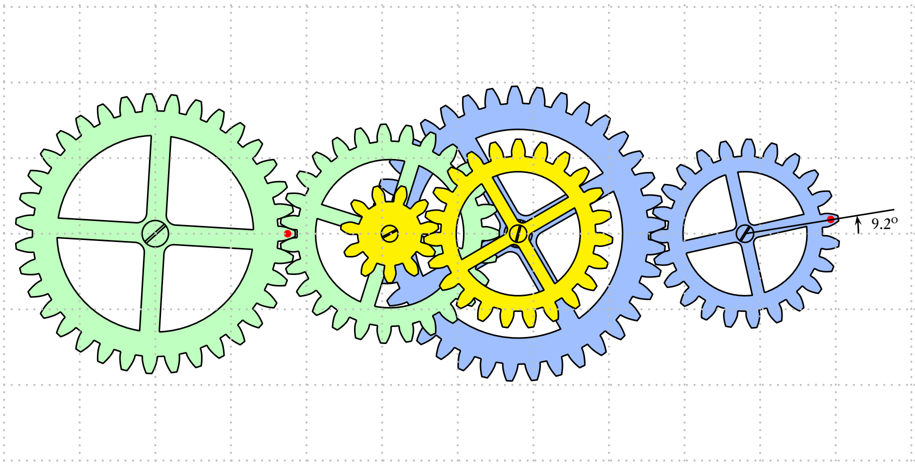
Il constate que si le choix des nombres de dents pour 3 roues (35,11,37) est très raisonnable pour le numérateur il n'est pas valable pour le dénominateur. Il essaie 14283.
$14283=14283,3,3,23,2$ que l'on peut décomposer ainsi :

$$14283=27\times 23\times 23$$

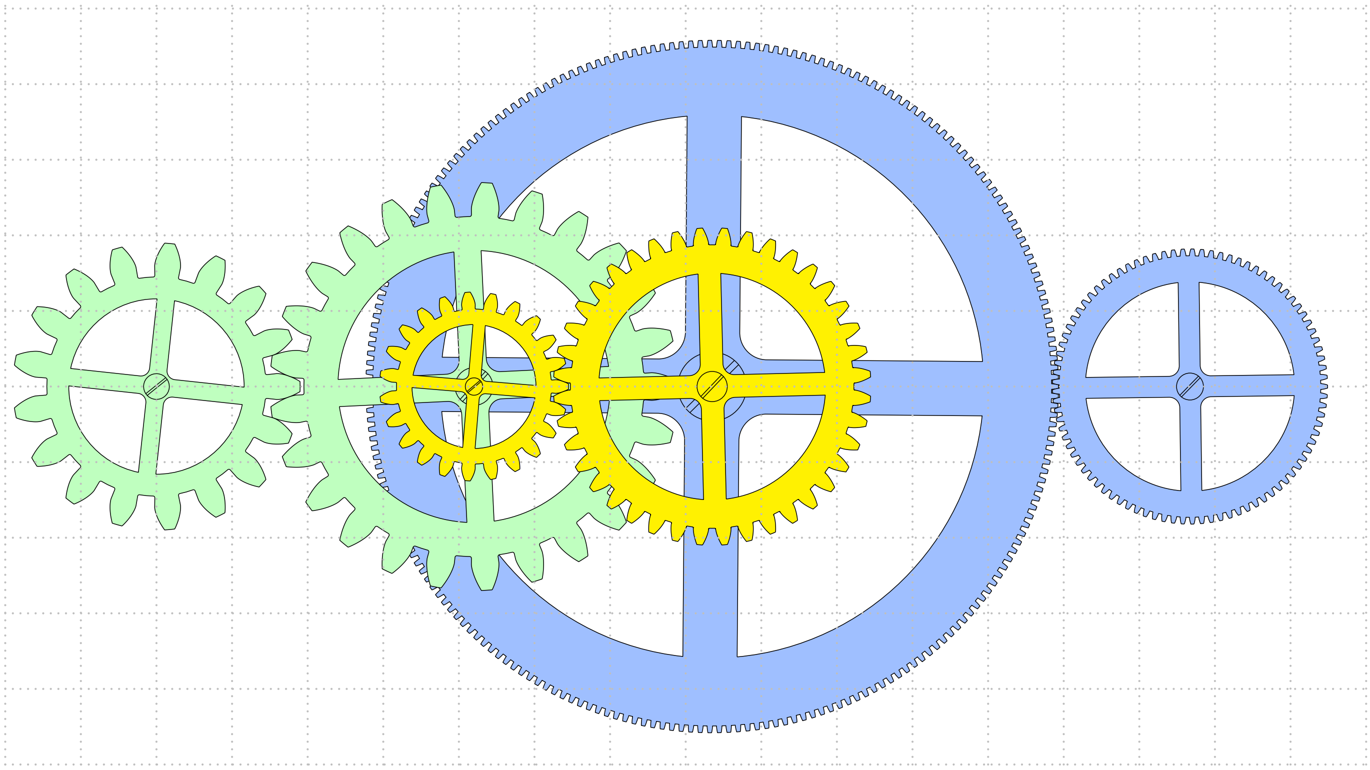
On a donc maintenant un choix raisonnable de 3 roues (27,23,23). Qu'est devenue la précision de ce rapport ?

$$\frac{14245}{14283}=0.9973394945039558$$

Ce qui conduit à une erreur de : $\dfrac{14245}{14283}-\dfrac{14245}{14284}=0.00006982214327250000$. Le calcul sur 365 tours de la Terre sur elle même donne :
$\left(\dfrac{14245}{14283}-\dfrac{14245}{14284}\right)\times 365\times 360^{\circ}=9.174629626006500^{\circ}$ de plus que la rotation réelle.
La réalisation de ce train d'engrenage $\dfrac{35}{27}\times\dfrac{11}{23}\times\dfrac{37}{23}$ avec pst-gears :



Un autre train d'engrenages proposé par l'auteur $\frac{17}{25} \times \frac{23}{40} \times \frac{227}{89} = 0.9972696629213483$, mais avec un nombre de dents plus élevé.



Les fichiers joints dans l'archive contiennent une version plus élaborée.