pst-crossingriver

gilg@acrotex.net, manuel.luque27@gmail.com

10 novembre 2020

1 Présentaion

La commande `\psCrossingRiver[options](a,b)` a pour but la représentation graphique de la trajectoire suivie par un nageur ou un canot à moteur, qui à partir d'un point d'une rive tente de parvenir à la rive opposée en pointant constamment sa direction vers le point d'accostage. On suppose que sa vitesse par rapport à l'eau est constante ainsi que la vitesse du courant.
On trouvera de plus amples renseignements sur le site : https://mathcurve.com/courbes2d/nageur/nageur.shtml.
Cette page propose le lien : https://www.feynmanlectures.caltech.edu/info/exercises/boat_time.html qui contient des solutions à l'exercice de l'ouvrage "Feynman's Tips On Physics" dont voici l'énoncé :
« 6 - 2 A motorboat that runs at a constant speed V relative to the water is operated in a straight river channel where the water is flowing smoothly with a constant speed R. The boat is first sent on a round trip from its anchor point to a point a distance d directly upstream. It is then sent on a round trip from its anchor point to a point a distance d away directly across the stream. For simplicity assume that the boat runs the entire distance in each case at full speed and that no time is lost in reversing course at the end of the outward lap. If t_V is the time the boat took to make the round trip in line with the stream flow, t_A the time the boat took to make the round trip across the stream, and t_L the time the boat would take to go a distance 2d on a lake.
a) What is the ratio t_v/t_A?
b) What is the ratio t_A/t_L? »
Il propose 2 méthodes pour atteindre la rive opposée(et revenir) qu'il nomme "the crabbing method" et "the pointing method". C'est la deuxième méthode qui est développée par Jürgen Gilg. Il reprend et détaille les calculs de Robert Ferréol dans la deuxième partie de ce document.

2 La commande \psCrossingRiver[options](a,b)

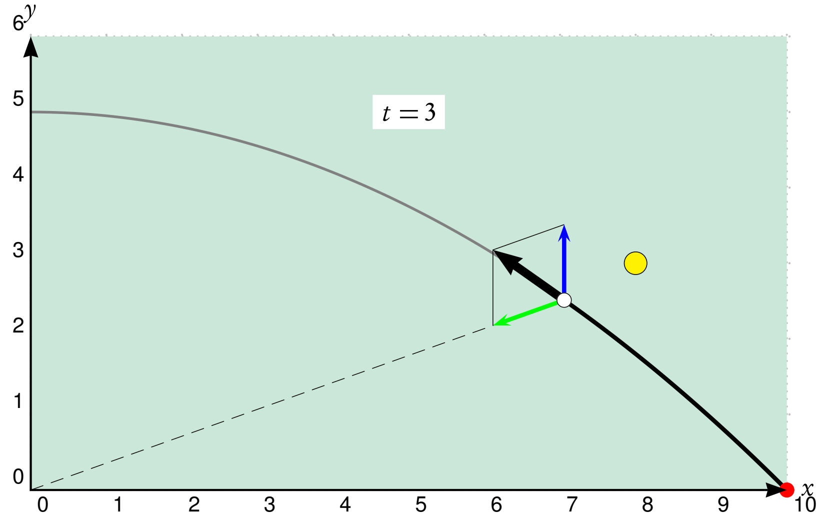
2.1 Les options

Elle comprend 3 options, `(a,b)` sont les coordonnées du point de départ. Ce sont les valeurs par défaut qui sont indiquées.

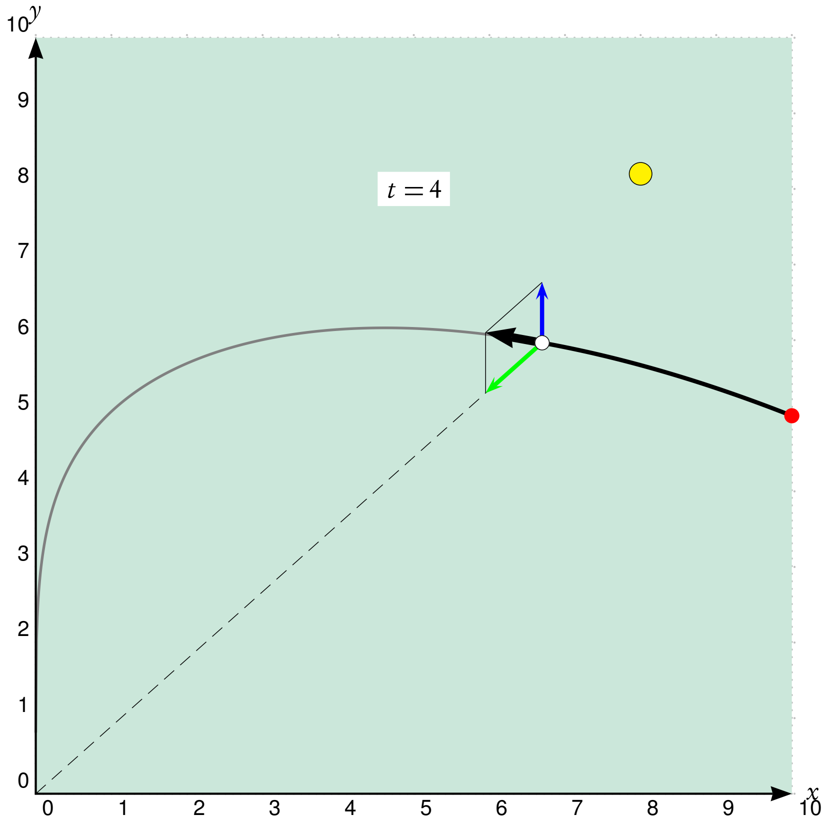
1. `[k=1]` : rapport entre la vitesse du courant et celle du nageur :$k=\dfrac{v_c}{v_n}$;
2. `[t=0]` : date en secondes ;
3. Le booléen `[drawingVectors=true]` pour dessiner les vecteurs-vitesses au point correspondant de la trajectoire à la date choisie.

On représente aussi une balle jaune entraînée par le courant. Le point d'arrivée sur la rive opposée est en $O(0,0)$.

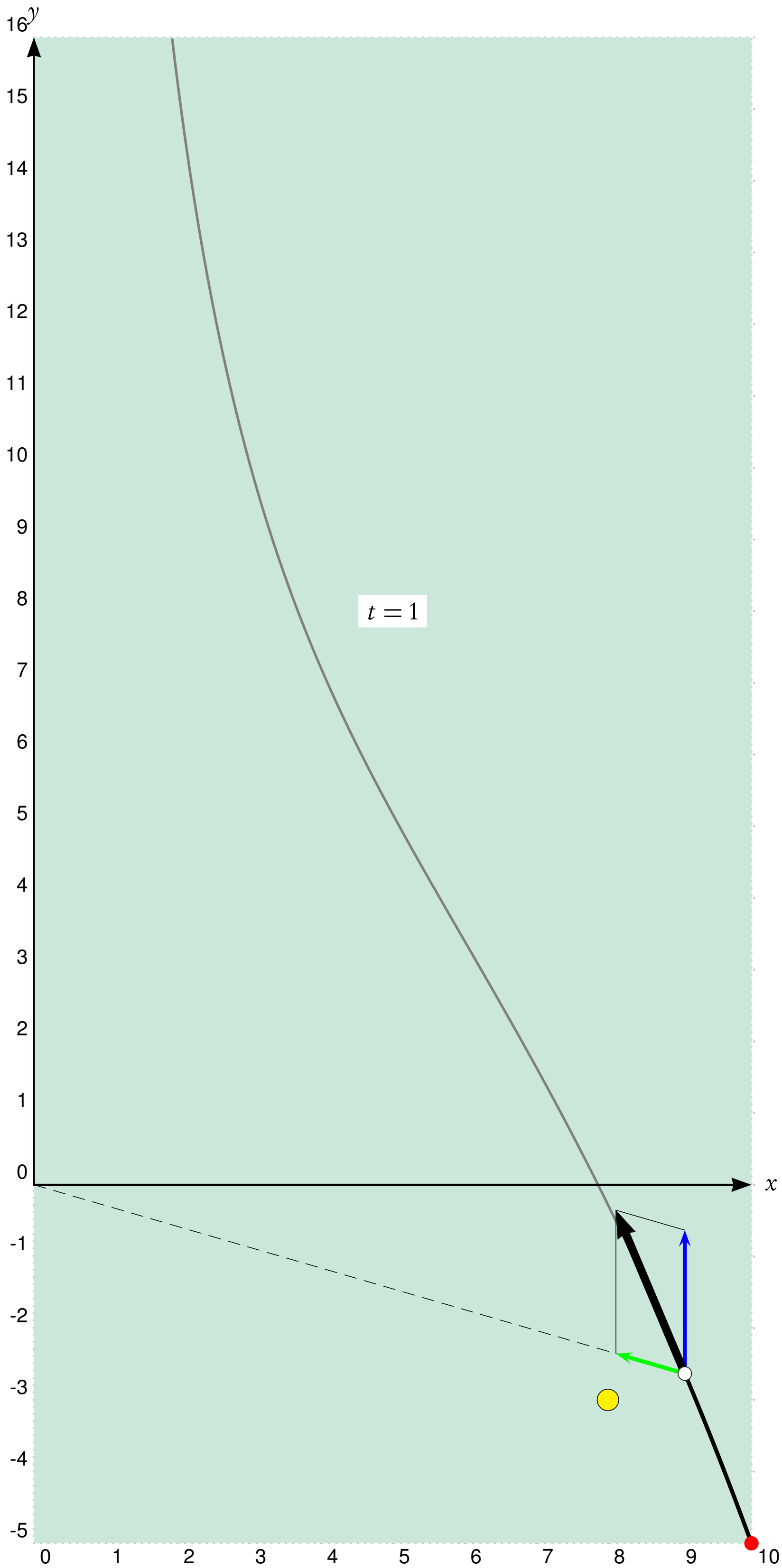
2.2 Exemples




```
\begin{pspicture}[showgrid](0,0)(10,6)
\psframe*[linecolor=cyan!20!green!20](10,6)
\psCrossingRiver[k=1,t=3,linewidth=2\pslinewidth](10,0)
\psline[arrowinset=0.1,arrowsize=0.2]{<->}(0,6)(0,0)(10,0)
\uput[u](0,6){$y$}
\uput[r](10,0){$x$}
\end{pspicture}
```



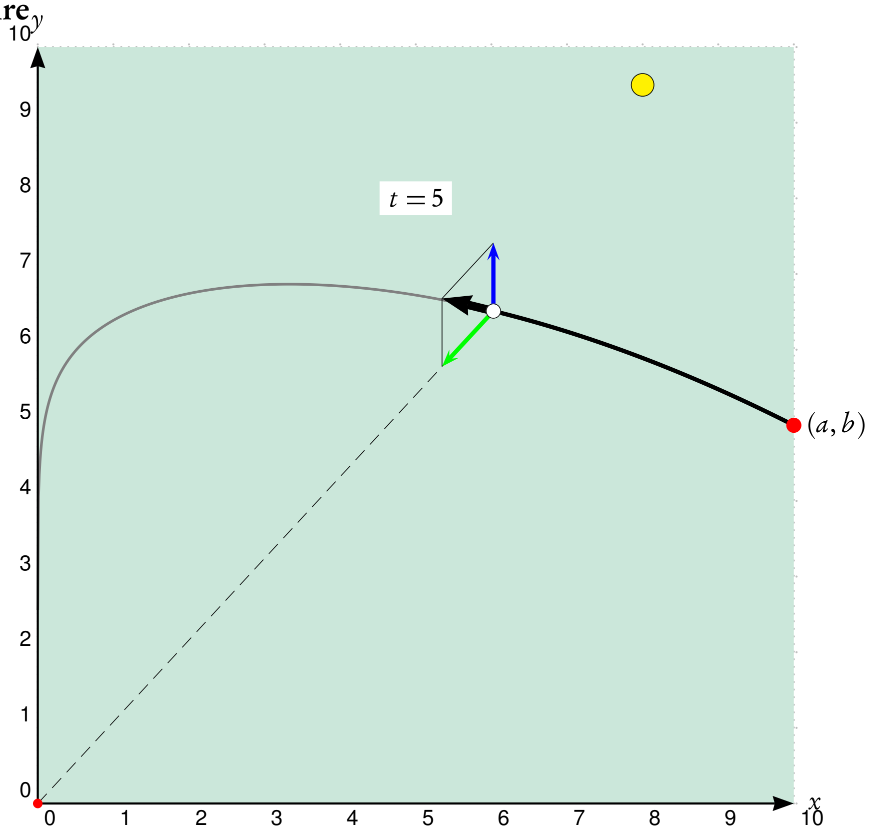

```
\begin{pspicture}[showgrid](0,0)(10,10)
\psframe*[linecolor=cyan!20!green!20](10,10)
\psCrossingRiver[k=0.8,t=4,linewidth=2\pslinewidth](10,5)
\psline[arrowinset=0.1,arrowsize=0.2]{<->}(0,16)(0,0)(10,0)
\uput[u](0,10){$y$}
\uput[r](10,0){$x$}
\end{pspicture}
```




```
\begin{pspicture}[showgrid](0,-5)(10,16)
\psframe*[linecolor=cyan!20!green!20](0,-5)(10,16)
\psclip{\psframe[linestyle=none](0,-5.5)(10.5,16)}
\psCrossingRiver[k=2,t=1,linewidth=2\pslinewidth](10,-5)
\endpsclip%
\psline[arrowinset=0.1,arrowsize=0.2]{<->}(0,16)(0,0)(10,0)
\uput[u](0,16){$y$}
\uput[r](10,0){$x$}
\end{pspicture}
```

3 Les calculs

3.1 La trajectoire



Les vitesses :

$$\vec{v}_c = v_c \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{v}_n = -v_n \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Loi de composition des vitesses vectorielles :

$$\vec{v} = \vec{v}_c + \vec{v}_n = v_c \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - v_n \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

La vitesse $\vec{v} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix}$, on en déduit les équations différentielles du mouvement du nageur :

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -v_n \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \tag{1}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = v_c - v_n \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \tag{2}$$

Comme Robert Ferréol, on distingue 3 cas suivant "*que le point de départ du nageur est en aval, au droit, ou en amont de la cible*", ils sont déjà illustrés dans les exemples précédents.

3.2 Le système des équations différentielles

On divise (2) par (1)

$$\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = -\frac{v_c}{v_n} \cdot \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x} + \frac{y}{x} = -\frac{v_c}{v_n} \cdot \sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} + \frac{y}{x}$$

On substitue $k = \dfrac{v_c}{v_n}$ et $u = \dfrac{y}{x}$ avec $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - u}{x}$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -k\sqrt{1+u^2} + u$$

Avec $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + u$ on a

$$x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + u = -k\sqrt{1+u^2} + u$$

Séparons les variables :

$$\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1+u^2}} = -k\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

On intègre :

$$\ln\left(u + \sqrt{1+u^2}\right) = -k\ln(x) + C^*$$

Pour homogénéiser l'expression, posons $C^* = k\ln C$.

$$\ln\left(u + \sqrt{1+u^2}\right) = -k\ln(x) + k\ln C = \ln(x^{-k}C^k)$$

$$\ln\left(u + \sqrt{1+u^2}\right) = \ln(x^{-k}C^k)$$

$$u + \sqrt{1+u^2} = x^{-k}C^k \tag{3}$$

En élevant à la puissance $1/k$ les deux membres, on obtient :

$$\left(u + \sqrt{1+u^2}\right)^{1/k} = \frac{C}{x}$$

On en déduit l'expression de la constante C, si à $t = 0$, le point de départ du nageur a pour coordonnées : (a, b).

$$C = a\left(u + \sqrt{1+u^2}\right)^{1/k} \quad \text{avec } u = \frac{b}{a}$$

En particulier si $b = 0 \quad \Rightarrow \quad u = 0$, alors $C = a$.
Reprenons l'expression (3), en remplaçant u par $\frac{y}{x}$:

$$\frac{y}{x} + \sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}} = x^{-k}C^k$$

$$y - x^{1-k}C^k = -\sqrt{x^2 + y^2}$$

On élève au carré et après simplification on a :

$$-2yx^{1-k}C^k = -C^{2k}x^{2-2k} + x^2$$

$$y = -\frac{C^{-k}}{2}x^{1+k} + \frac{C^k}{2}x^{1-k}$$

Qu'on peut réécrire ainsi :

$$y = y(x) = \frac{x}{2}\left[-\left(\frac{x}{C}\right)^k + \left(\frac{C}{x}\right)^k\right] \tag{4}$$

3.2.1 Le temps – "the pointing method"

Calculer le temps du nageur pour arriver à sa cible :

$$v_\perp = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -v_n\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Alors on inverse l'équation :

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = -\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{v_n x}$$

On insère l'équation (4) pour y

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = -\frac{\sqrt{x^2 + \left[\frac{x}{2}\left(-\left(\frac{x}{C}\right)^k + \left(\frac{C}{x}\right)^k\right)\right]^2}}{v_n x}$$

On simplifie

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=-\frac{\sqrt{x^2+\frac{x^2}{4}\left(\left(\frac{x}{C}\right)^{2k}-2+\left(\frac{C}{x}\right)^{2k}\right)}}{v_n x}=-\frac{\sqrt{\frac{x^2}{4}\left(4+\left(\frac{x}{C}\right)^{2k}-2+\left(\frac{C}{x}\right)^{2k}\right)}}{v_n x}=-\frac{\sqrt{\frac{x^2}{4}\left(\left(\frac{x}{C}\right)^{2k}+2+\left(\frac{C}{x}\right)^{2k}\right)}}{v_n x}$$

$$=-\frac{x}{2}\cdot\frac{\sqrt{\left(\frac{x}{C}\right)^{2k}+2+\left(\frac{C}{x}\right)^{2k}}}{v_n x}=-\frac{\sqrt{\left(\left(\frac{x}{C}\right)^{k}+\left(\frac{C}{x}\right)^{k}\right)^2}}{2v_n}=-\frac{\left(\frac{x}{C}\right)^{k}+\left(\frac{C}{x}\right)^{k}}{2v_n}=-\frac{1}{2v_n}\left(C^{-k}x^k+C^k x^{-k}\right)$$

On intègre

$$t=-\frac{1}{2v_n}\left(\frac{C^{-k}}{1+k}x^{1+k}+\frac{C^k}{1-k}x^{1-k}\right)+K$$

On sait que $t(a)=0$ (le départ du nageur (a,b) et $C=a\left(u+\sqrt{1+u^2}\right)^{1/k}$ et $u=\frac{b}{a}$)

$$K=\frac{1}{2v_n}\left(\frac{\left(a\left(u+\sqrt{1+u^2}\right)^{1/k}\right)^{-k}}{1+k}a^{1+k}+\frac{\left(a\left(u+\sqrt{1+u^2}\right)^{1/k}\right)^{k}}{1-k}a^{1-k}\right)$$

$$=\frac{a}{2v_n}\left(\frac{\left(\frac{b}{a}+\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}\right)^{-1}}{1+k}+\frac{\frac{b}{a}+\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}}{1-k}\right)$$

On calcule pour K, si $b=0$ (cas spécial) :

$$K=\frac{a}{v_n(1-k^2)}$$

Pour le temps t avec en variable x on a finalement

$$t(x)=-\frac{1}{2v_n}\left(\frac{C^{-k}}{1+k}x^{1+k}+\frac{C^k}{1-k}x^{1-k}\right)+\frac{a}{2v_n}\left(\frac{\left(\frac{b}{a}+\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}\right)^{-1}}{1+k}+\frac{\frac{b}{a}+\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}}{1-k}\right)$$

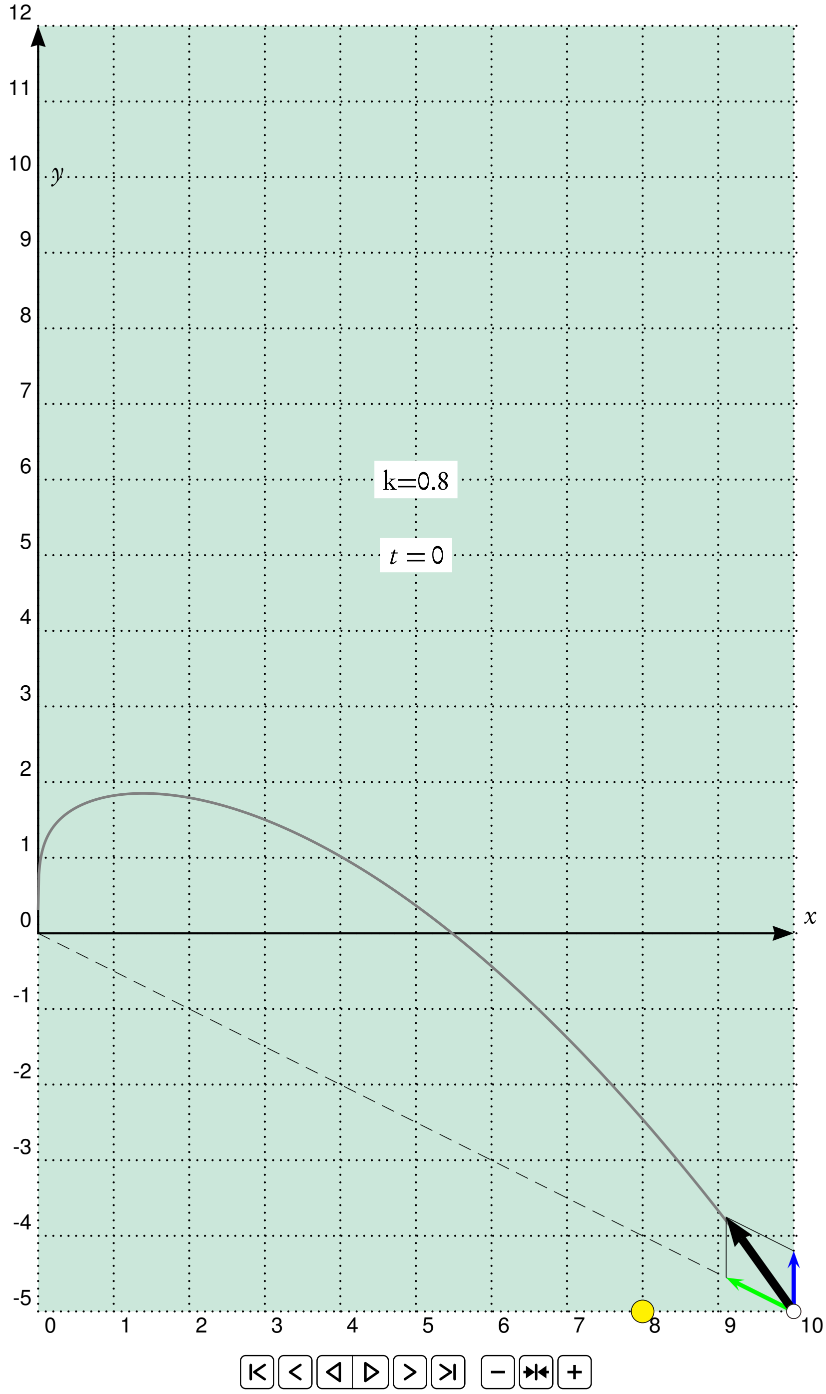
Le temps du nageur pour arriver à la cible $(0,0)$ est :

$$T_1=t(0)=\frac{a}{2v_n}\left(\frac{\left(\frac{b}{a}+\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}\right)^{-1}}{1+k}+\frac{\frac{b}{a}+\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}}{1-k}\right)$$

Pour le cas spécial $b=0$:

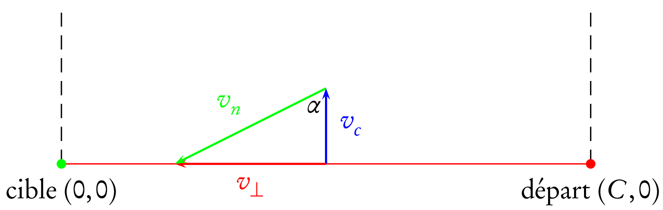
$$T_1=t(0)=\frac{a}{v_n(1-k^2)}$$

3.3 Animation si $k < 1$



4 Le nageur conserve une direction fixe ("the crabbing method")

Si le nageur veut arriver à la rive opposée suivant une direction fixe, il lui faut nager contre le courant avec un angle constant α et une vitesse v_n aussi constante.



Le temps – “the crabbing method”
Les calculs sont beaucoup plus faciles.
Avec le théorème de Pythagore on a la vitesse orthogonale $v_\perp$ à la rive :

$$v_\perp = \sqrt{v_n^2 - v_c^2}$$

La distance entre les deux rives est C. Alors le temps pour arriver à la rive opposée suivant une droite avec $k = \frac{v_c}{v_n} < 1$ (le nageur est plus rapide que le courant) :

$$T_2 = \frac{C}{v_\perp} = \frac{C}{\sqrt{v_n^2 - v_c^2}} = \frac{C}{v_n\sqrt{1-k^2}}$$

Si l'on compare les deux temps T_1 et T_2 :

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{\frac{C}{v_n(1-k^2)}}{\frac{C}{v_n\sqrt{1-k^2}}} = \frac{C}{v_n(1-k^2)} \cdot \frac{v_n\sqrt{1-k^2}}{C} = \frac{1}{\sqrt{1-k^2}} > 1$$

Cela veut dire que $T_1 > T_2$.
Autrement dit : Le nageur (intelligent) arrive à la rive opposée le plus rapidement, quand il garde un angle constant α avec le courant de la rivière avec une vitesse v_n constante.