Découper un ellipsoïde en tranches circulaires

manuel.luque27@gmail.com

23/10/2020

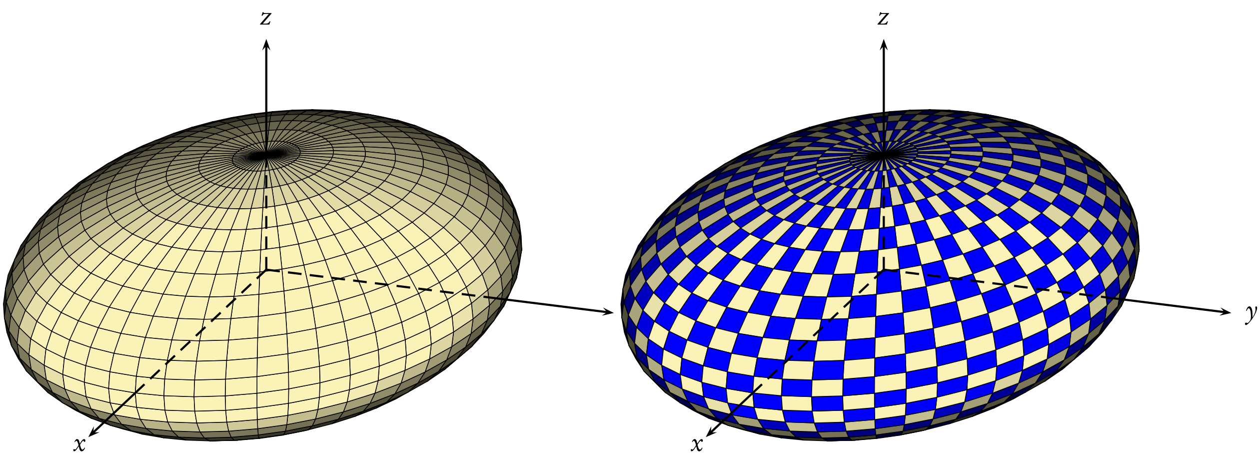
La solution de la question proposée au concours pour les deux académies de Montpellier et d'Aix (année 1870) :[1] http://www.numdam.org/item?id=NAM_1871_2_10__17_1, est rédigée par par M. Auguste Macé, élève de Mathématiques spéciales au lycée de Grenoble.

L'énoncé comporte 3 parties, la première est formulée ainsi :

« I. *Étant donné un ellipsoïde, on détermine les points de contact des plans tangents parallèles aux plans des sections circulaires ; on mène deux sphères tangentes chacune en deux de ces points symétriques par rapport au grand axe : trouver l'équation des surfaces de révolution du second degré circonscrites à ces deux sphères. Classification et discussion de ces surfaces.* »

On a compris qu'il s'agit de déterminer, dans la première étape de cette partie, les ombilics de l'ellipsoïde d'équation :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad \text{avec } a>b>c$$

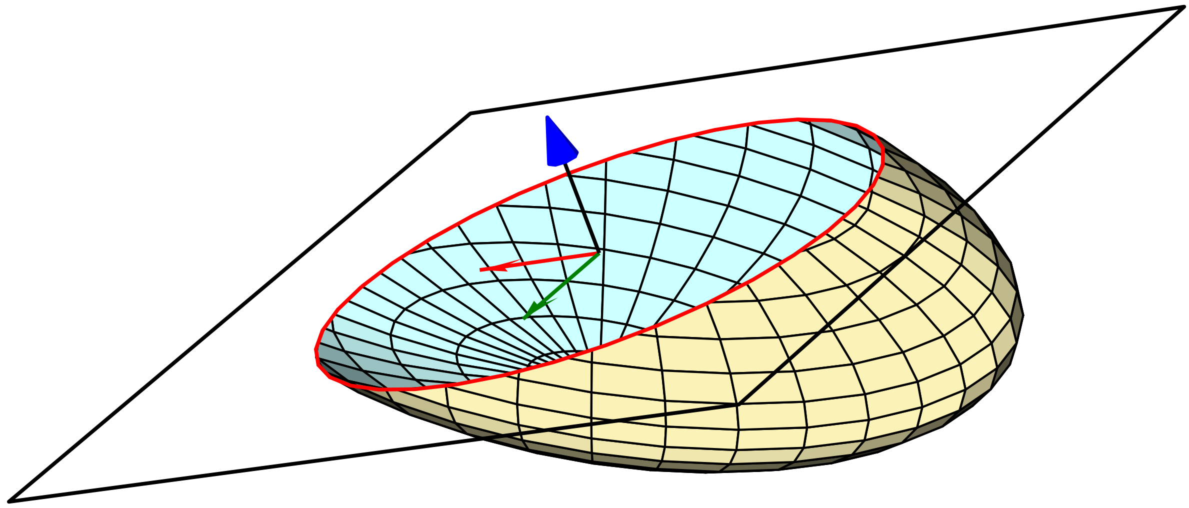


La démonstration d'Auguste Macé commence par : "***on sait*** *que les plans des sections cycliques sont parallèles au plan*" :

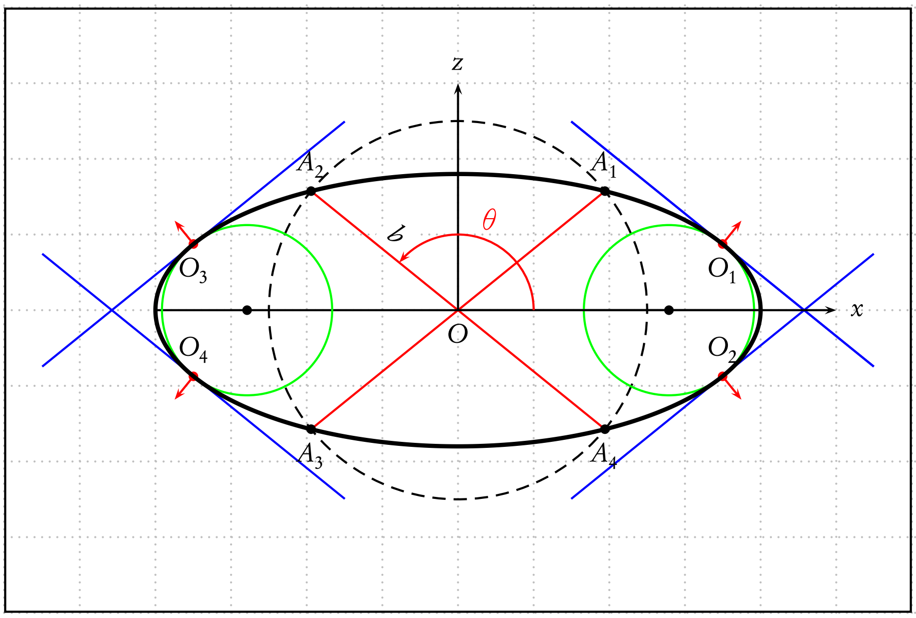
$$x=z\sqrt{\frac{\dfrac{1}{c^2}-\dfrac{1}{b^2}}{\dfrac{1}{b^2}-\dfrac{1}{a^2}}}$$

Démontrons que l'équation du plan de section circulaire passant par l'origine s'écrit bien ainsi.

1. Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 10 (1871), p. 17-26



La section circulaire passant par l'origine est un cercle de rayon égal au demi-axe suivant Oy : b. Pour simplifier plaçons-nous dans le plan xOz. La section de l'ellipsoïde dans ce plan est une ellipse de demi-grand axe a et de demi-petit axe c.



Les 2 sections circulaires passant par O sont des cercles de rayon b. Déterminons les coordonnées des points A_i.
Ellipse :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

Cercle de rayon b :

$$\begin{cases} x = b\cos\theta \\ z = b\sin\theta \end{cases}$$

On remplace x et z dans l'équation de l'ellipse :

$$\frac{b^2\cos^2\theta}{a^2}+\frac{b^2\sin^2\theta}{c^2}=1 \Rightarrow \frac{\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\theta}{c^2}=\frac{1}{b^2}$$

On cherche θ.

$$\frac{\cos^2\theta}{a^2}+\frac{1-\cos^2\theta}{c^2}=\frac{1}{b^2}\Rightarrow \cos^2\theta\left[\frac{1}{a^2}-\frac{1}{c^2}\right]=\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}$$

On en déduit :

$$\cos\theta=\pm\sqrt{\frac{\frac{1}{c^2}-\frac{1}{b^2}}{\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}}}\quad \text{et}\quad \sin\theta=\pm\sqrt{\frac{\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}}{\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}}}$$

$$\tan\theta=\pm\sqrt{\frac{\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}}{\frac{1}{c^2}-\frac{1}{b^2}}}$$

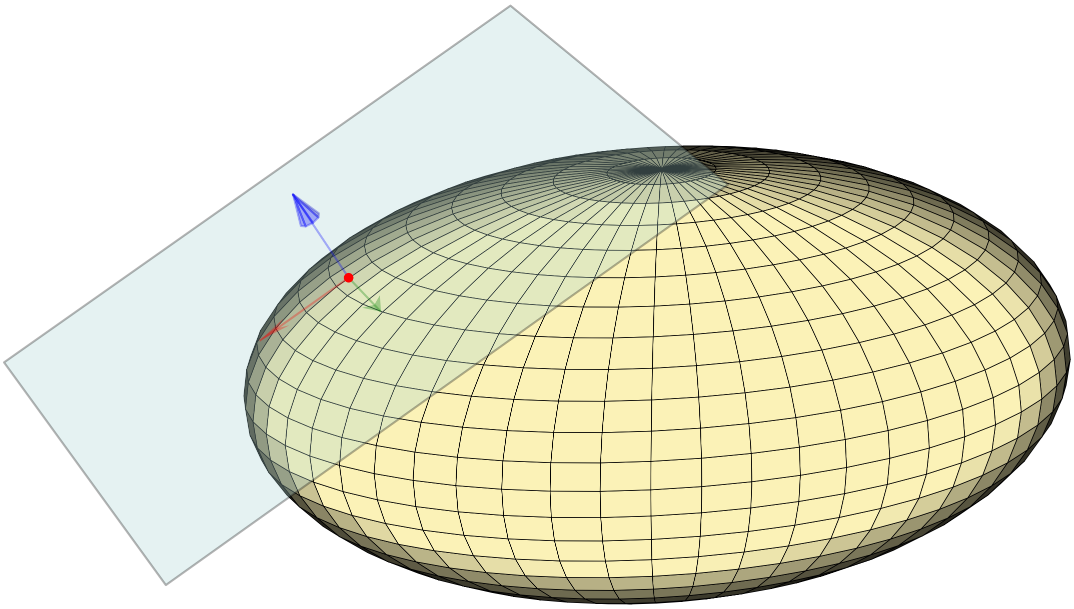
Les équations des plans de section circulaire passant par O sont :

$$z=\pm\sqrt{\frac{\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}}{\frac{1}{c^2}-\frac{1}{b^2}}}\,x$$

Pour les coordonnées des 4 ombilics, on se reportera à la démonstration imparable d'Auguste Macé. Pour O_1 :

$$\begin{cases} x_1=a\sqrt{\dfrac{a^2-b^2}{a^2-c^2}} \\ y_1=0 \\ z_1=c\sqrt{\dfrac{b^2-c^2}{a^2-c^2}} \end{cases}$$

Voici, par exemple, le plan tangent et la normale à l'ellipsoïde en O_1.



Le vecteur normal unitaire aux plans de section vaut :

$$\begin{cases} n_x=\pm\dfrac{c}{b}\sqrt{\dfrac{a^2-b^2}{a^2-c^2}} \\ n_y=0 \\ n_z=\dfrac{a}{b}\sqrt{\dfrac{b^2-c^2}{a^2-c^2}} \end{cases}$$

Si l'on considère un point d'un des plans situé sur le rayon qui joint O à un ombilic (par exemple $O_1(x_1, 0, z_1)$), ses coordonnées valent :

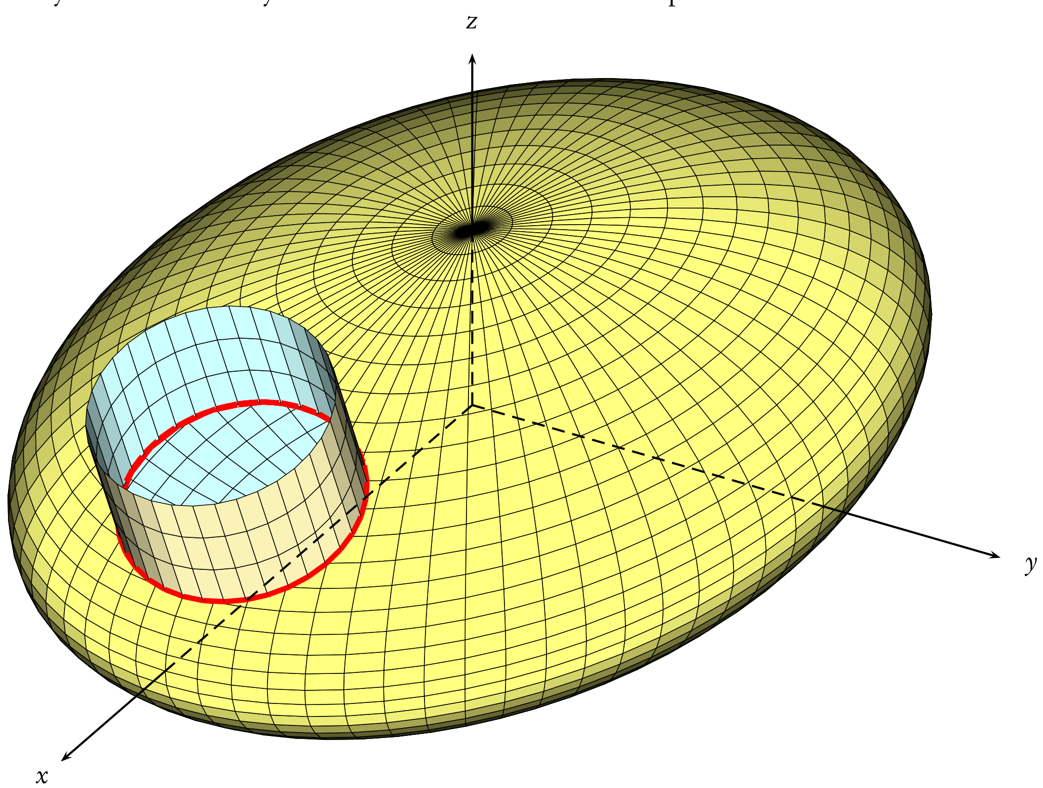
$$\begin{cases} x_P = kx_1 \\ y_P = 0 \\ z_P = \dfrac{x_P z_1}{x_1} \end{cases}$$

La distance de O au plan de section $d = |x_P n_x + z_p n_z|$ avec $0 < d < \dfrac{ac}{b}$, $\dfrac{ac}{b}$ est la distance de O aux ombilics.

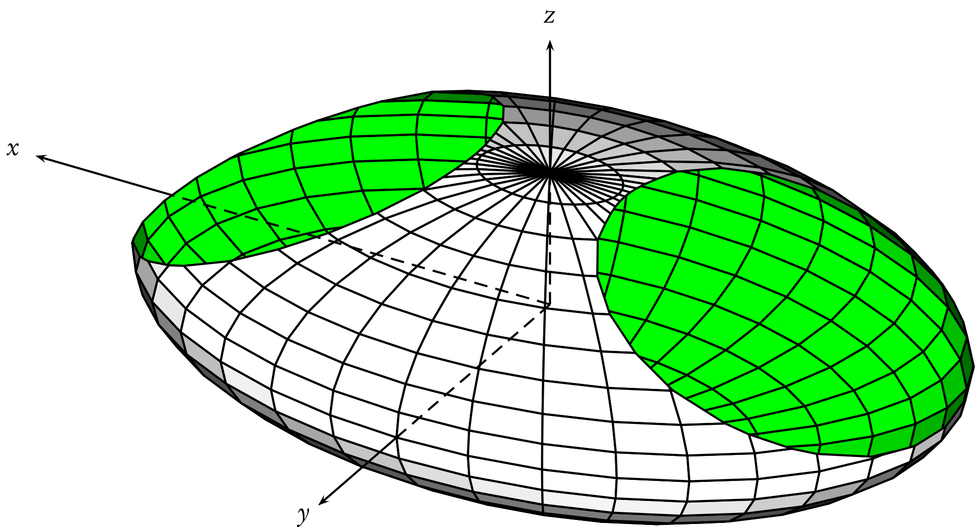
Le rayon des sections circulaires vaut :

$$r = b\sqrt{1 - \left(\frac{bd}{ac}\right)^2}$$

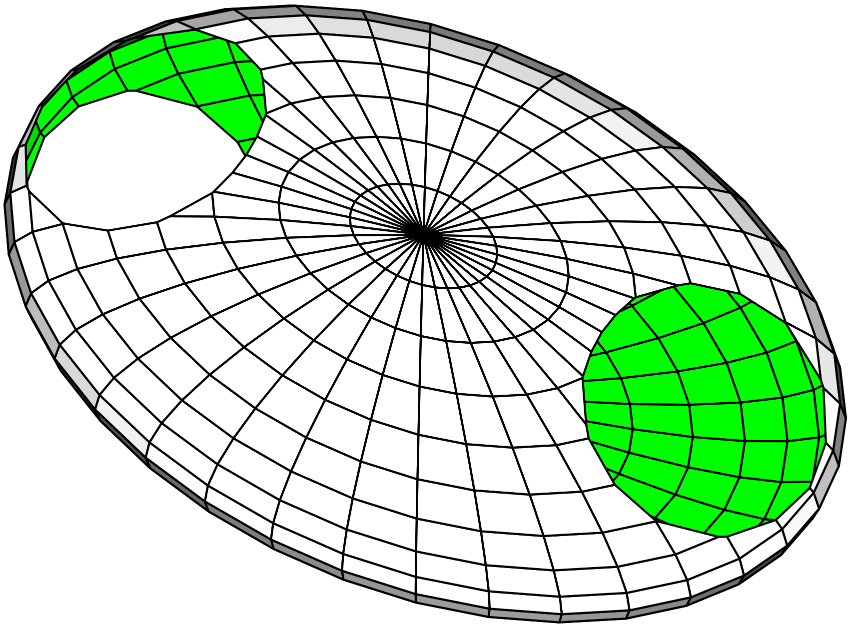
On peut ajuster un cylindre de même rayon sur une section circulaire de l'ellipsoïde.



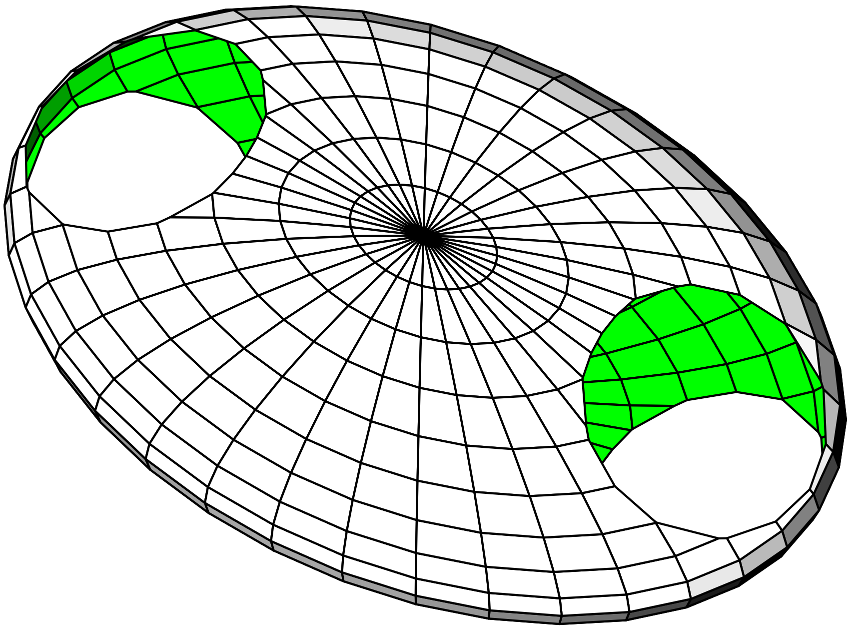
Découpe de 2 sections circulaires.



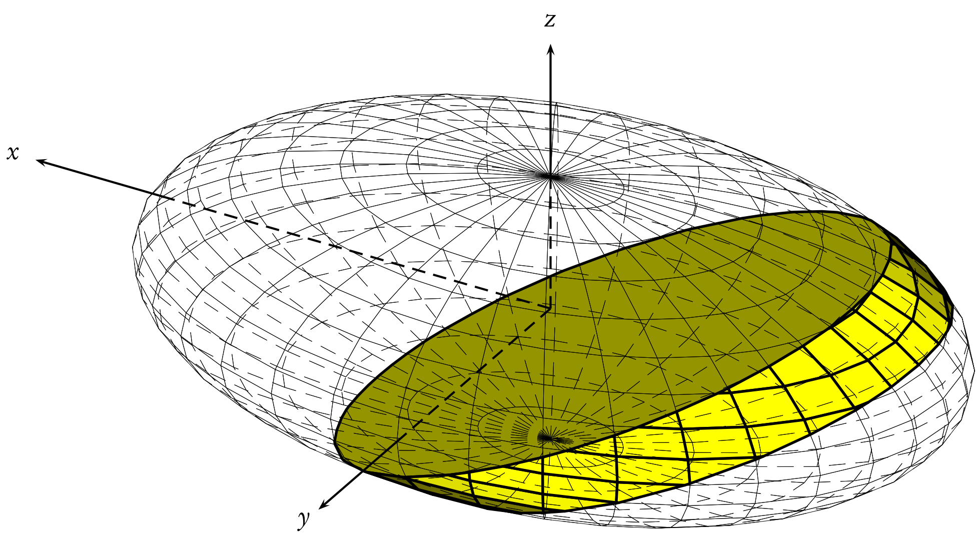
Découpe de 3 sections circulaires.



Découpe de 4 sections circulaires.



On découpe une tranche de section circulaire (une rondelle) :



On enlève une rondelle et on conserve les 2 parties restantes.