Spirale de Théodore généralisée (v.2.0)

manuel.luque27@gmail.com

20/05/2020

1 Présentation

Pour construire la spirale de Théodore de Cyrène, l'utilisation des nombres complexes est un moyen particulièrement élégant et rapide. Je ne sais pas qui en a eu l'idée pour la première fois, mais Philip J. Davis dans son livre "*Spirals From Theodorus to Chaos*" (A K Peters Wellesley, Massachusetts) utilise cette méthode :
« *I place the Theodorus spiral in the complex plane and define its vertices z_n in iterative fashion* :

$$z_{n+1} = z_n + iz_n/|z_n|, i = \sqrt{-1}$$

where $z_0 = 1$, for example. »
et la généralise pour produire des spirales très remarquables, ce qu'il note plaisamment :
«"Man muss immer generalisieren," wrote C. G. J. Jacobi. Mathematicians should always generalize, and moved by this directive and without excessive exertion of the imagination, one writes down

$$z_{n+1} = az_n + bz_n/|z_n|$$

for a and b arbitrary complex numbers, and hopes that this yields something interesting. It does.»

L'objectif de ce document est de reproduire avec les outils de PSTricks quelques-unes des spirales remarquables obtenues par Philip J. Davis en jouant sur les coefficients a et b, grâce à une commande : `\pstTheodorusSpiral[options]`.
Dans son livre Philip J. Davis va beaucoup plus loin :
« One may even move out of the space of one complex variable into a vector formulation and write down

$$v_{n+1} = Av_n + Bv_n/||v_n|| + c$$

where A and B are square matrices (with real or complex elements), c a column vector, and v_n a sequence of column vectors of appropriate dimension, and the norm equals some accessible and interesting vector norm. ». Cette méthode sera illustrée avec la commande `\pstTheodorusSpiralAB[options]`.

2 La commande \pstTheodorusSpiral[options]

Voici les options de cette commande, dont les valeurs par défaut sont indiquées :

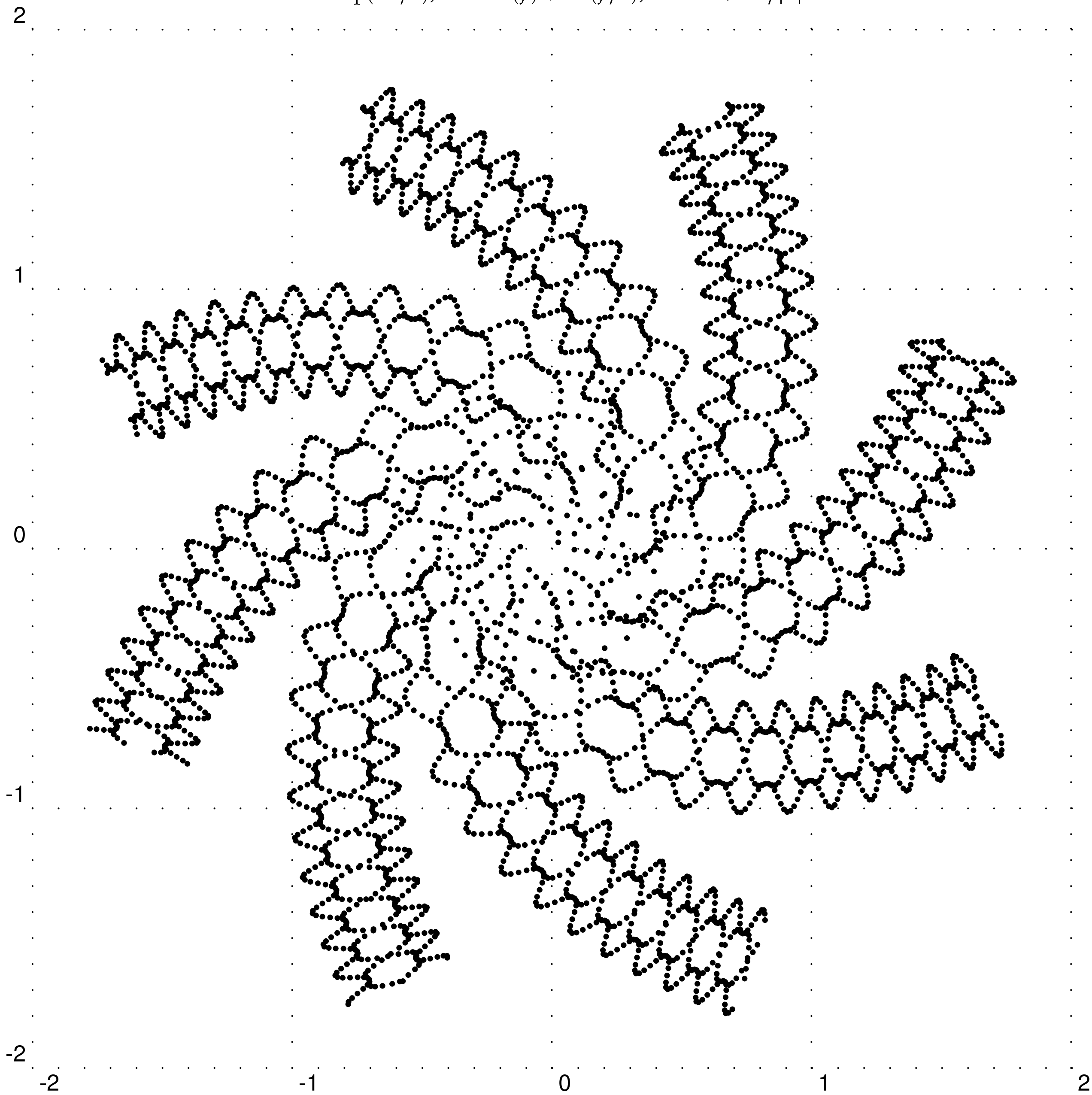
1. `[N=1000]` : nombre d'iterations ;
2. `[z=1 0]` : point initial $z = 1$;
3. `[a=1 0]` : $a = 1$;
4. `[b=0 1]` : $b = i$.
5. Le booléen `[ConnectPoints=false]` pour relier les points en écrivant : `[ConnectPoints]`.
6. Le booléen `[ShowPoints=true]` pour marquer les points, on désactive ce marquage avec : `[ShowPoints=false]`.
7. Le booléen `[RainbowColors=false]` pour colorier les points dans le dégradé des couleurs de l'arc-en-ciel.
8. Le booléen `[SpecialSpirals=false]` pour représenter des cas particuliers du livre.
   On écrira `[SpecialSpirals]` et l'un des 3 cas possibles suivants, qui sont positionnées par défaut à false :
9. Le booléen `[RandomTheodorusSpiral]` ;
10. le booléen `[PyrotechnicSpiral]` ;
11. le booléen `[TrigonometricSum]`.

La couleur des points est par défaut celle donnée par PSTricks avec `[linecolor=]` et le rayon des points est donné par `[linewidth=]`.
Pour chaque cas, Il faudra ajuster les dimensions du dessin avec l'option de PSTricks `unit=`.

3 Exemples \pstTheodorusSpiral[options]

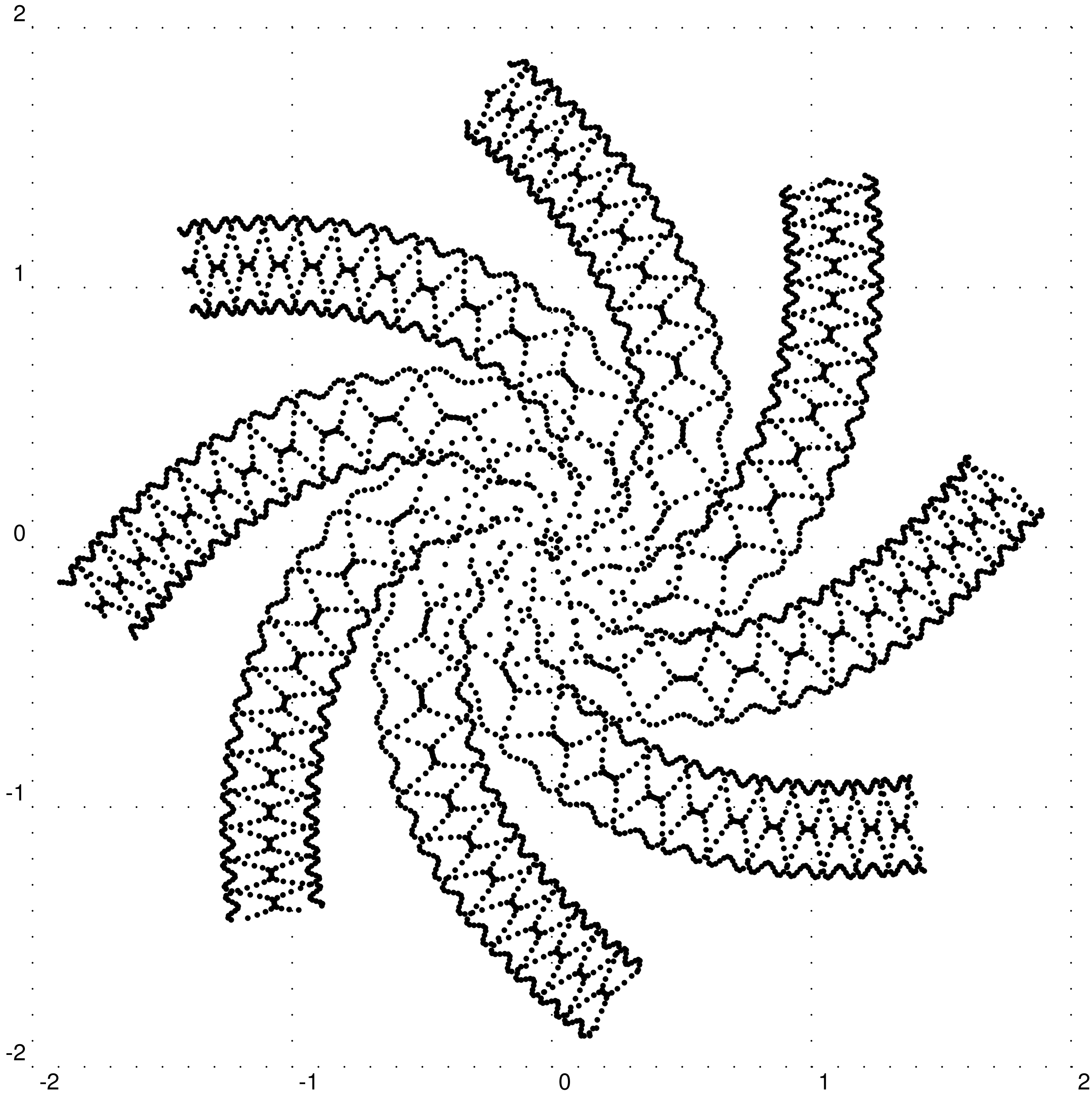
Cet exemple est noté “Chicken-wire spiral” page 26. Les suivants sont des variations sur b.

$$a = \exp(\pi i/4);\ b = \sin(j) + \sin(j/5);\ z = az + bz/|z|.$$



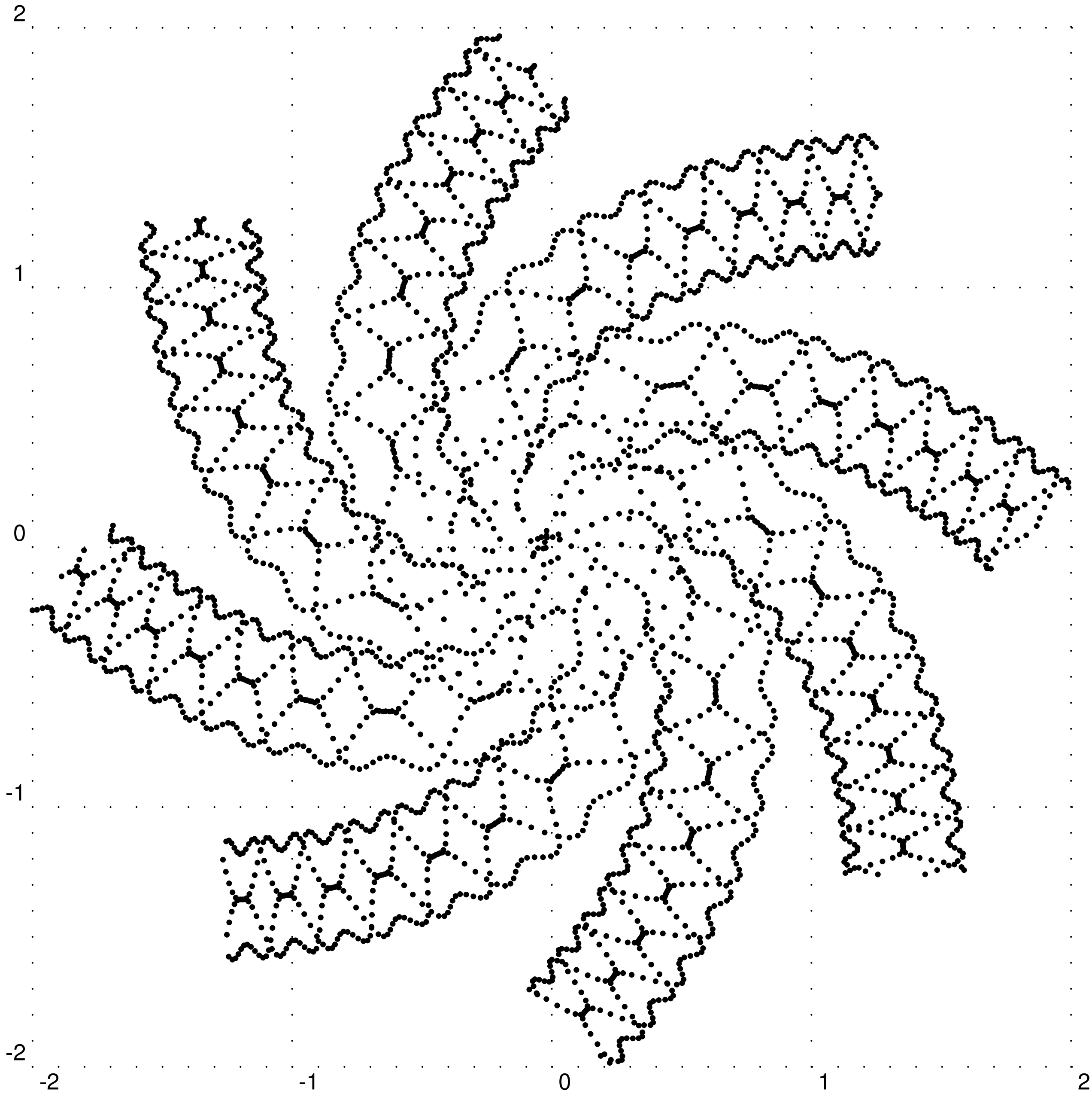

```
\begin{pspicture}(-8,-8)(8,8)
\pstTheodorusSpiral[unit=4,
                    b=n 180 mul 3.14159 div sin n 180 mul 3.14159 div 5 div sin add 0,
                    a=2 sqrt 2 div dup,N=5000]
\psgrid[subgriddiv=0,griddots=10,gridlabels=10pt,unit=4](-2,-2)(2,2)
\end{pspicture}
```

Note : j’ai remplacé le compteur d’itérations j par n.




```
\begin{pspicture}(-8,-8)(8,7)
\pstTheodorusSpiral[unit=4,
                    b=n 180 mul 3.14159 div sin n 180 mul 3.14159 div 5 div sin sub 0,
                    a=2 sqrt 2 div dup,N=5000]
\psgrid[subgriddiv=0,griddots=10,gridlabels=10pt,unit=4](-2,-2)(2,2)
\end{pspicture}
```

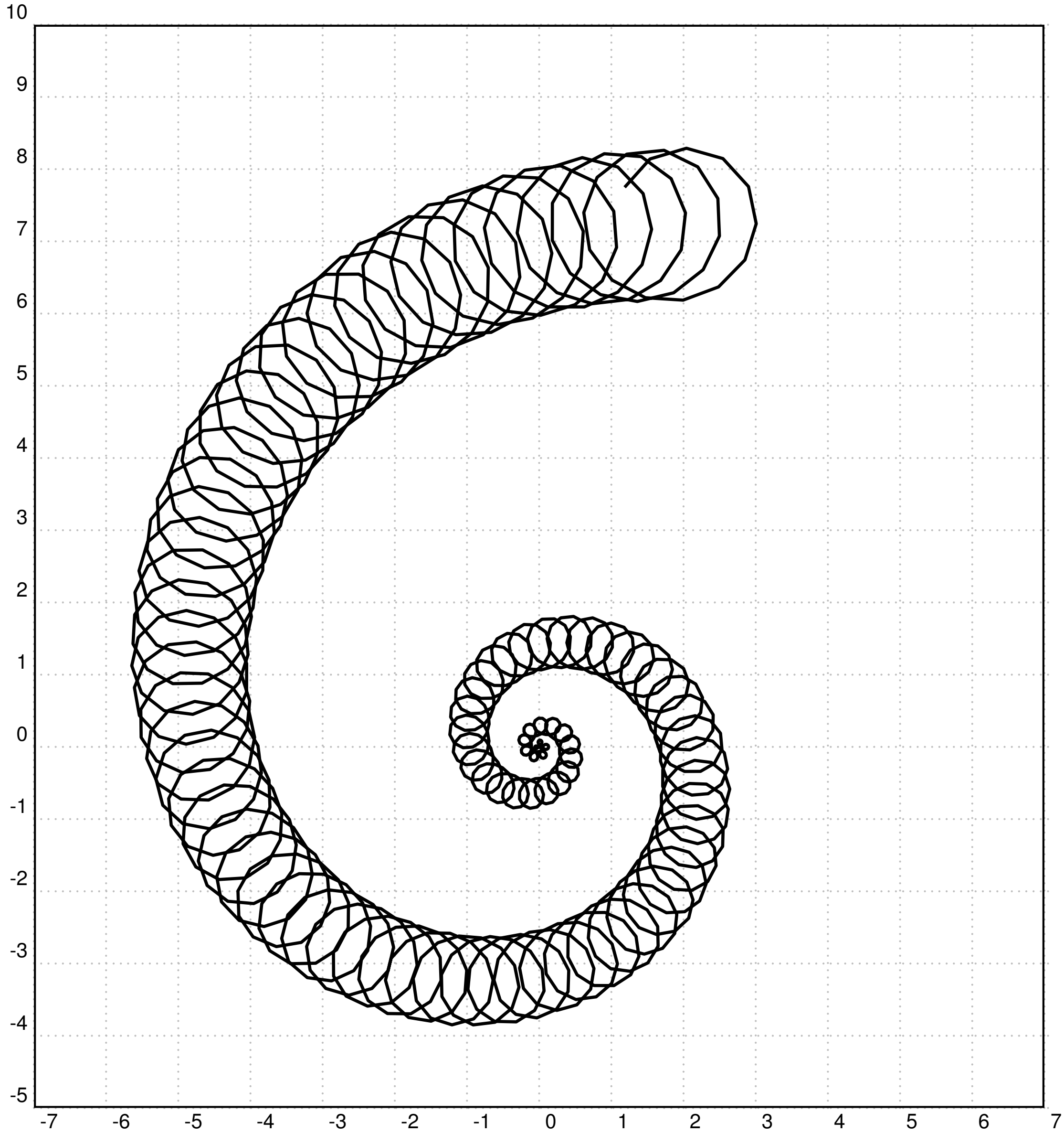
En jouant sur les signes, on fait tourner les bras de la spirale dans un sens ou l'autre.




```
\begin{pspicture}(-8,-8)(8,7)
\pstTheodorusSpiral[unit=5,b=0 n 180 mul 3.14159 div sin n 180 mul 3.14159 div 5 div sin sub,
                    a=2 sqrt 2 div dup,N=3500]
\psgrid[subgriddiv=0,griddots=10,gridlabels=10pt,unit=4](-2,-2)(2,2)
\end{pspicture}
```

Cette spirale est notée “Spring Spiral” page 22 :

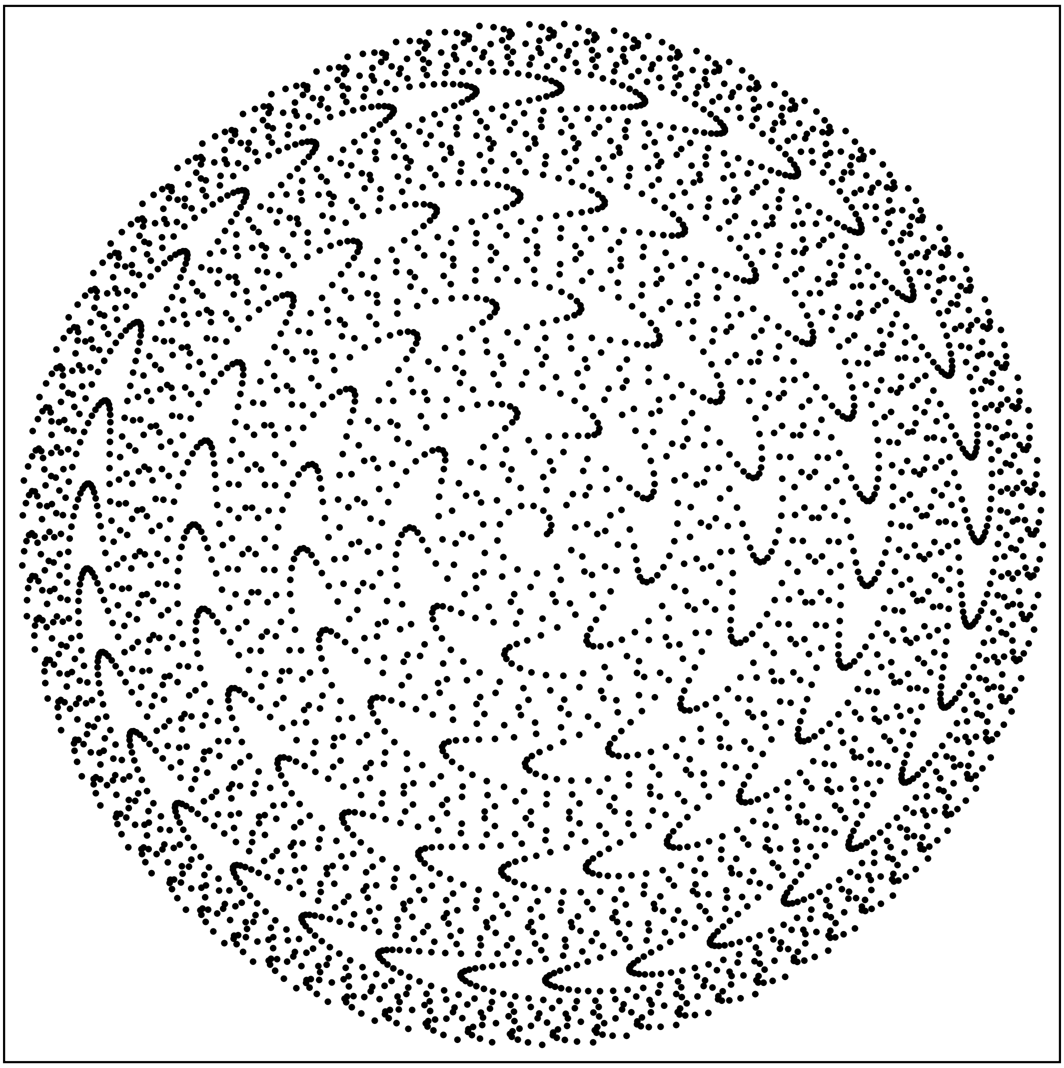
$$d = .5\exp(.5ij);\ z = z + dz/|z|.$$



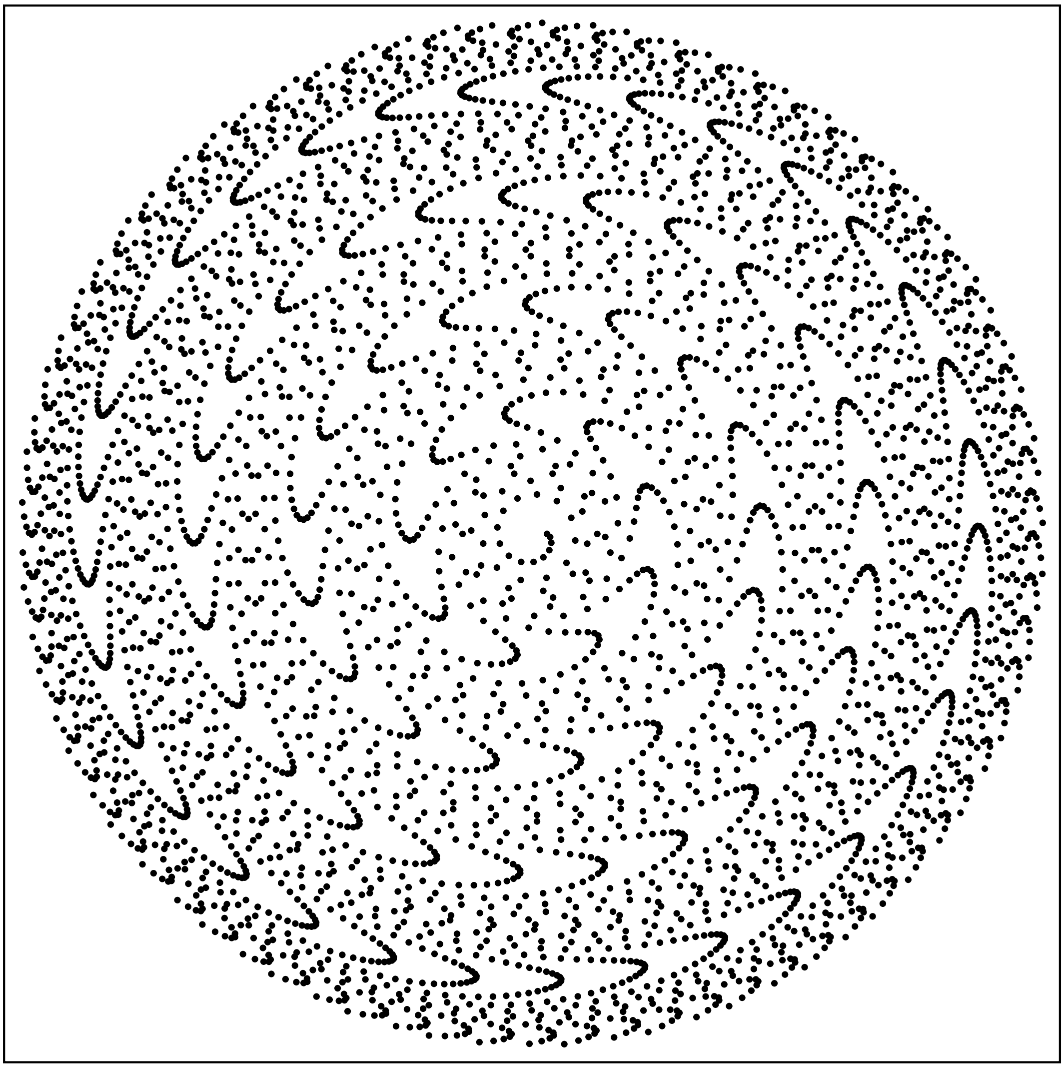

```
\begin{pspicture}[showgrid](-7,-5)(7,10)
\psframe(-7,-5)(7,10)
\pstTheodorusSpiral[unit=0.025,
                   b=n 2 div dup 180 mul 3.14159 div cos mul n 2 div dup 180 mul 3.14159 div sin mul,
                   N=1200]
\end{pspicture}
```

Note : j’ai remplacé le compteur d’itérations j par n.

Cette spirale est notée “*The-marigold-Spiral*” page 47. En jouant sur les signes, on fait tourner les bras de la spirale dans un sens ou l’autre.

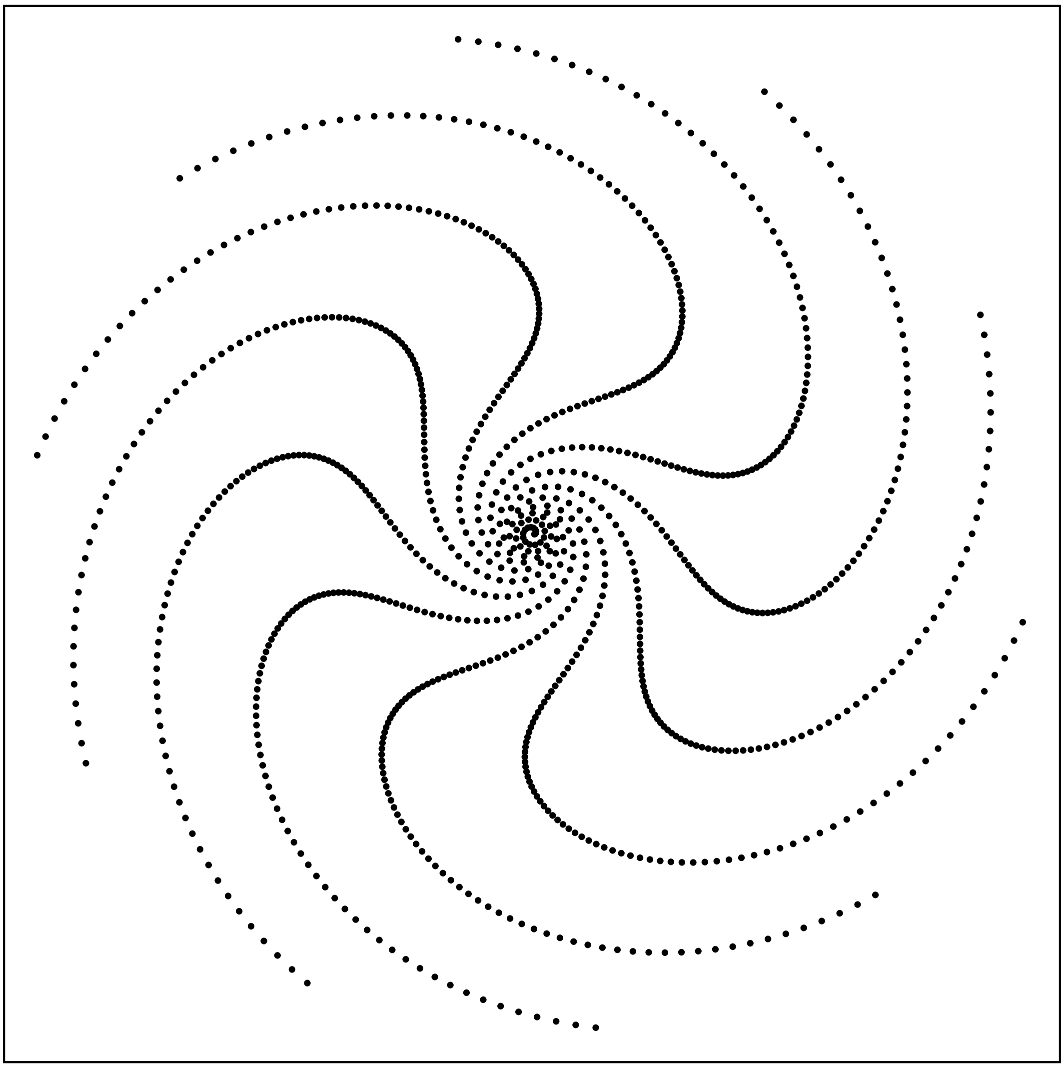


```
\begin{pspicture}(-7,-7)(7,7)
\psframe(-7,-7)(7,7)
\pstTheodorusSpiral[unit=4,b=0.707 -0.707,a=0.707 0.707,N=4000]
\end{pspicture}
```

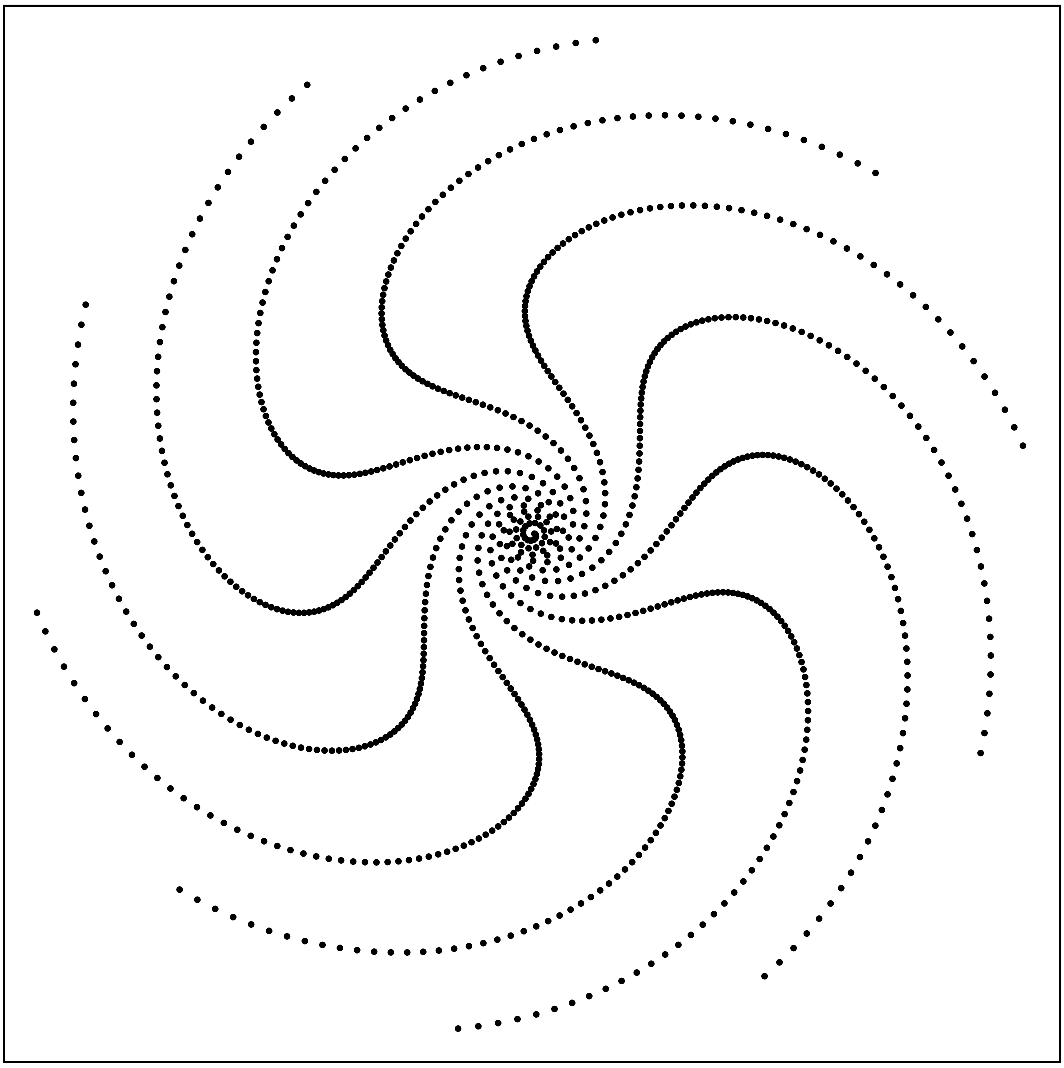


```
\begin{pspicture}(-7,-7)(7,7)
\psframe(-7,-7)(7,7)
\pstTheodorusSpiral[unit=4,b=0.707 0.707,a=0.707 -0.707,N=4000]
\end{pspicture}
```

Cette spirale est notée "Spider" page 16. Ici aussi, en jouant sur les signes, on fait tourner les bras de la spirale dans un sens ou l'autre

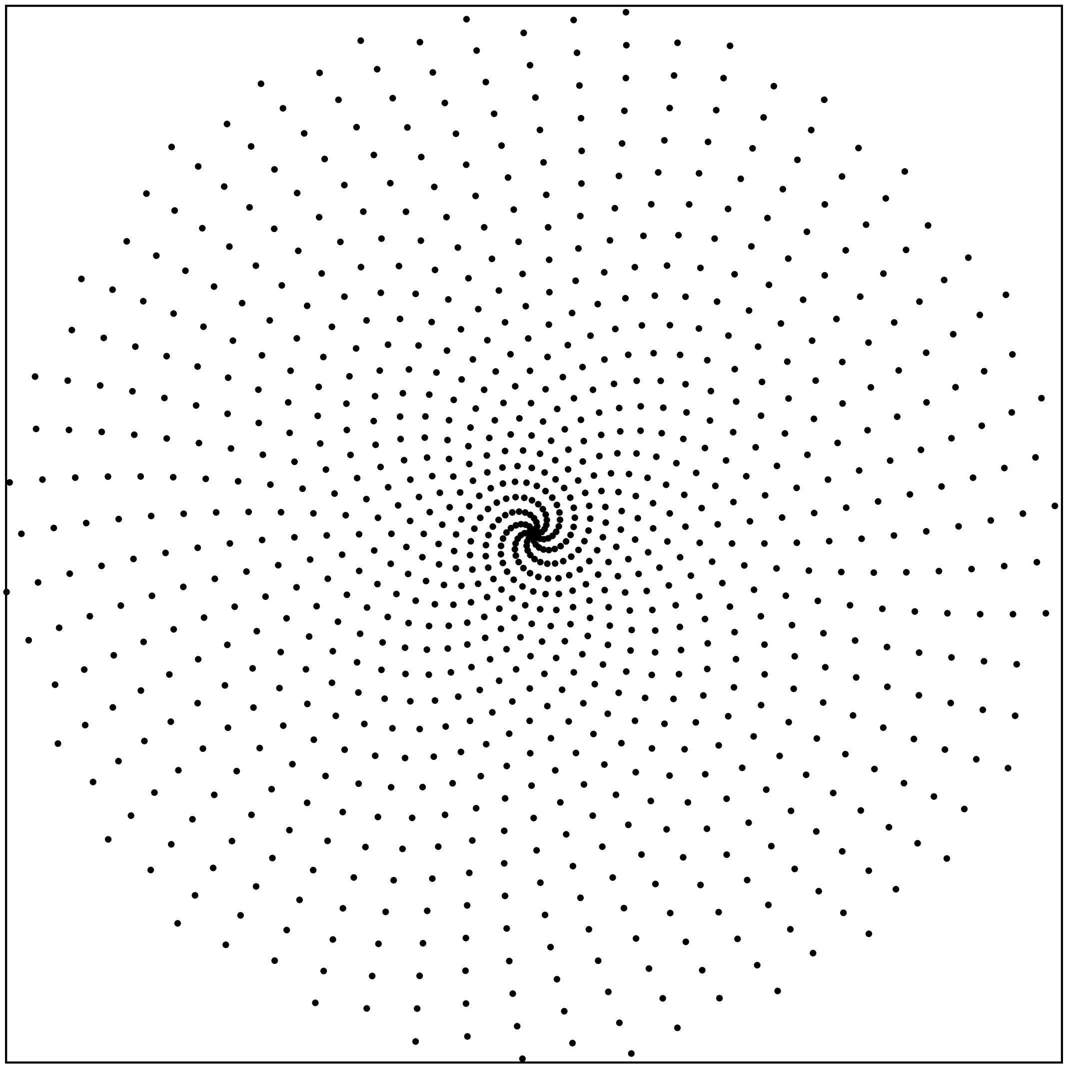


```
\begin{pspicture}(-7,-7)(7,7)
\psframe(-7,-7)(7,7)
\pstTheodorusSpiral[unit=0.5,b=1 -0.737,a=0.8048 0.59355]
\end{pspicture}
```

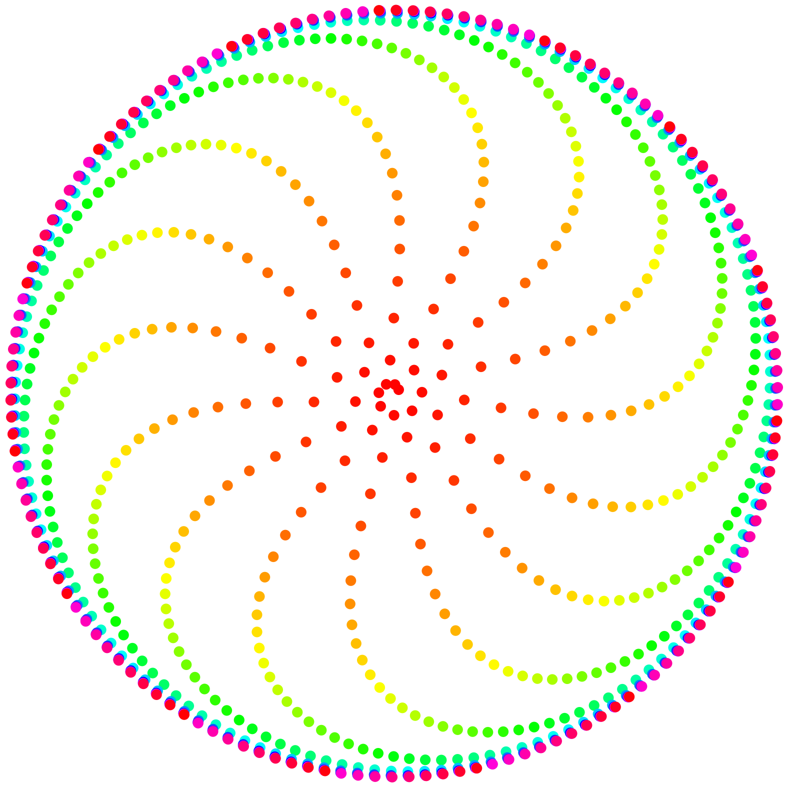


```
\begin{pspicture}(-7,-7)(7,7)
\psframe(-7,-7)(7,7)
\pstTheodorusSpiral[unit=0.5,b=1 0.737,a=0.8048 -0.59355]
\end{pspicture}
```

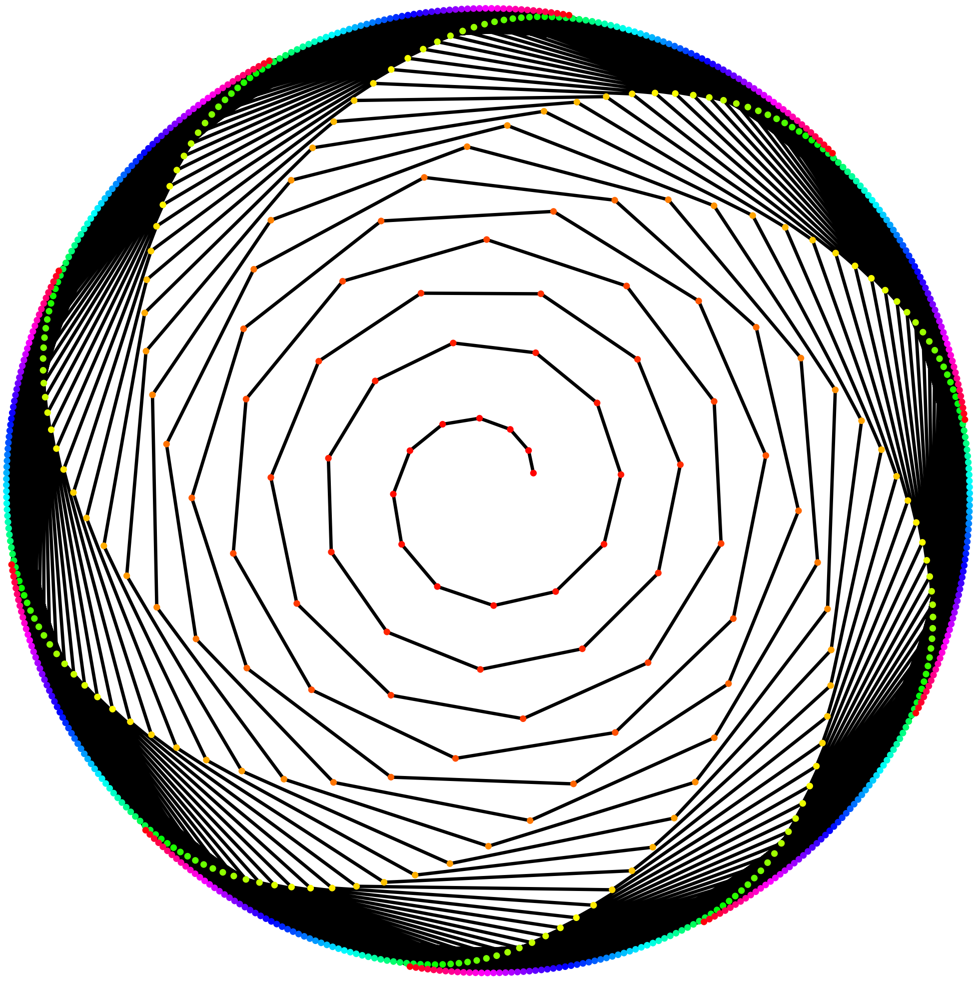
Cette spirale est notée “Illusions spiral” page 52.



```
\begin{pspicture}(-7,-7)(7,7)
\psframe(-7,-7)(7,7)
\pstTheodorusSpiral[unit=0.2,b=0.65 0.7599,a=0.6 0.8]
\end{pspicture}
```



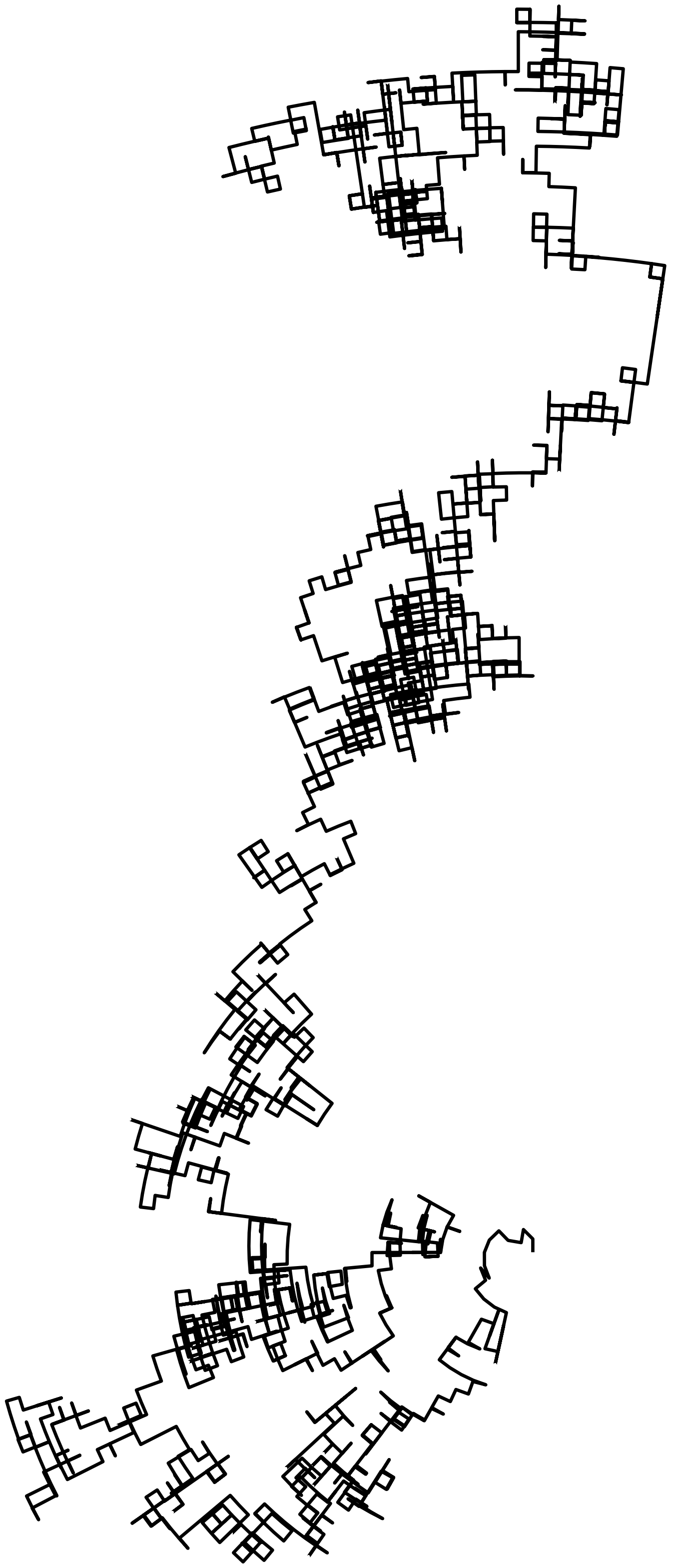
```
\begin{pspicture}(-7,-7)(7,7)
\pstTheodorusSpiral[unit=1,b=1 0.74,a=0.66 0.74,linewidth=2pt,RainbowColors]
\end{pspicture}
```



```
 \begin{pspicture}(-7,-7)(7,7)
\pstTheodorusSpiral[unit=15,b=0.36 -0.160,a=0.78 0.60,RainbowColors,ConnectPoints,N=800 ]
\end{pspicture}
```

On aborde à partir d'ici les 2 cas spéciaux : `RandomTheodorusSpiral` et `PyrotechnicSpiral`.
La *spirale* suivante est notée "Discretely randomized Theodorus spiral" page 23.

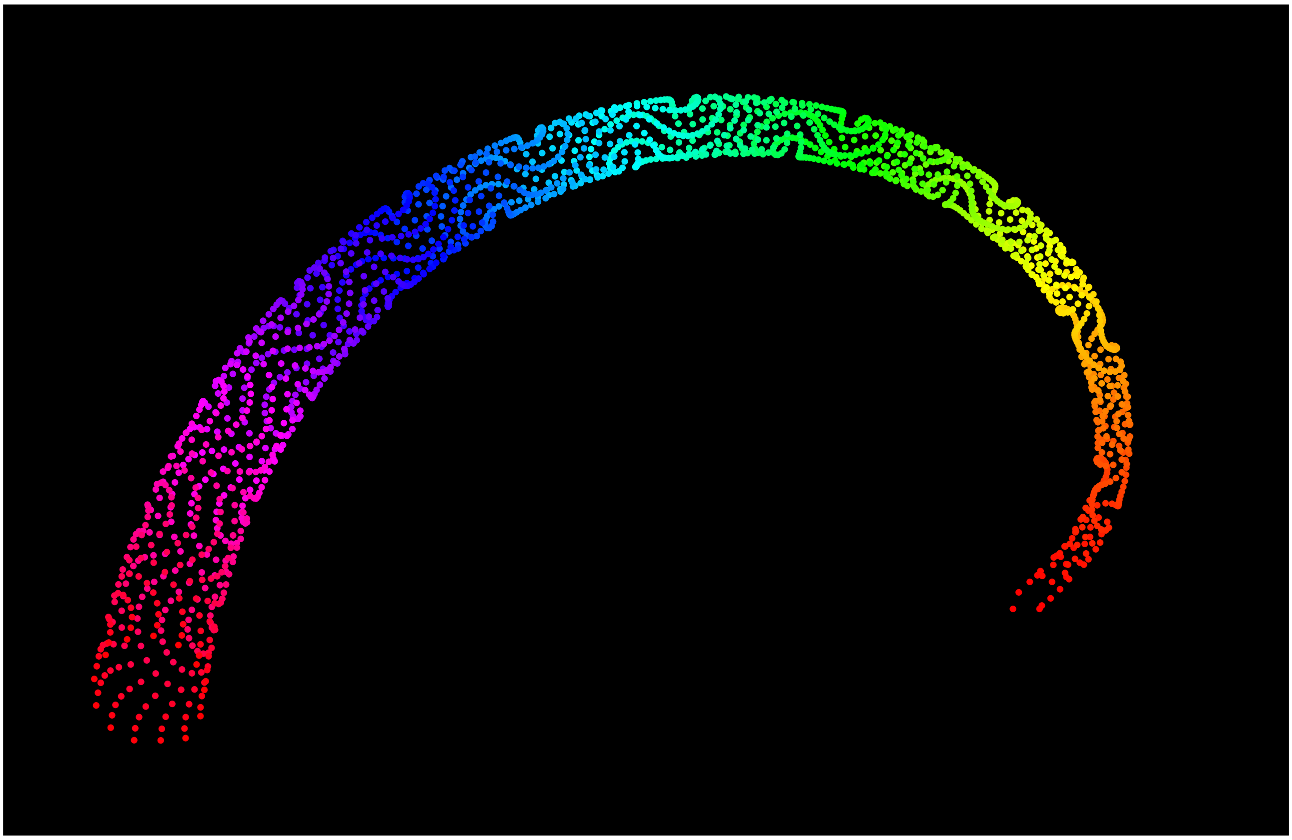
$$d = \text{floor}(7 \times \text{rand});\; z = z + idz/|z|.$$



```
\begin{pspicture}(-8,-6)(3,17)
\pstTheodorusSpiral[unit=5,RandomTheodorusSpiral,SpecialSpirals,ConnectPoints,N=3000,ShowPoints=false]
\end{pspicture}
```

Celle-ci est notée “Pyrotechnic spiral” page 28.

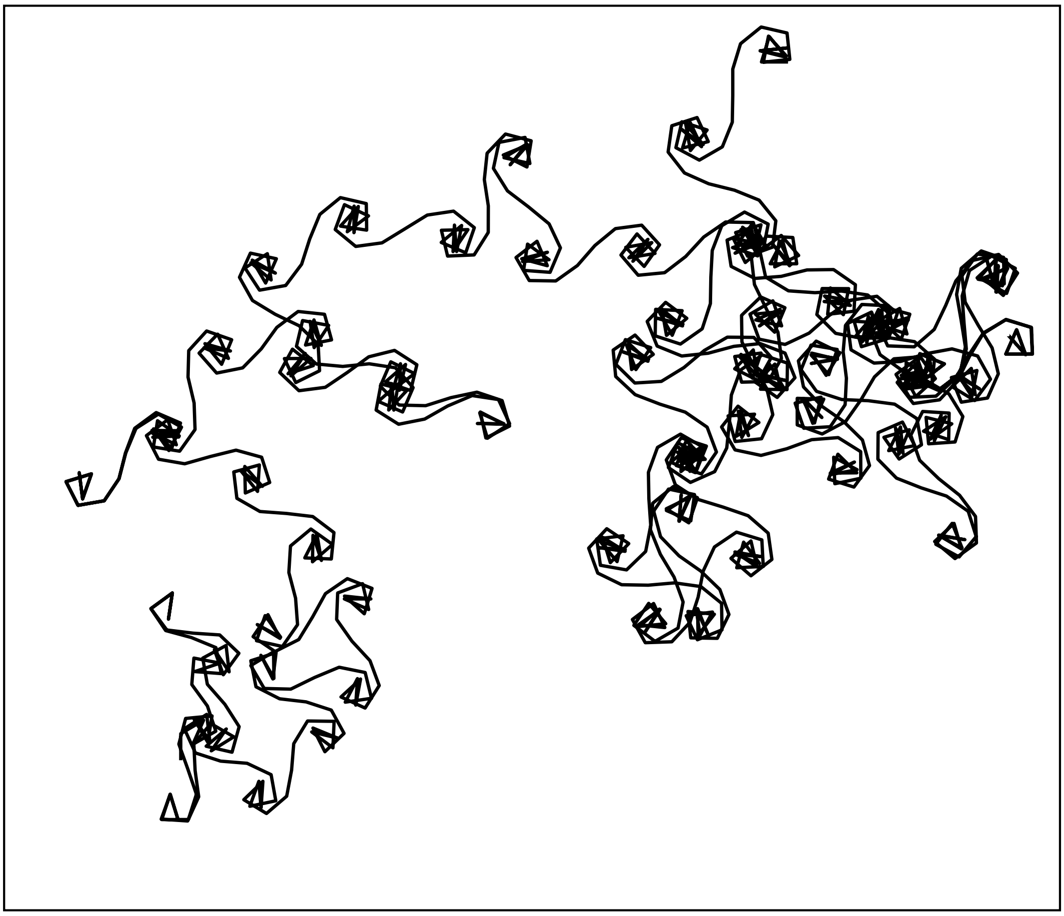
$$w = .7896;\ p = 1.1;\ d = \exp(\pi i w j p);\ z = z + dz/|z|$$



```
\begin{pspicture}(-13,-3)(4,8)
\psframe*(-13,-3)(4,8)
\pstTheodorusSpiral[unit=10,PyrotechnicSpiral,SpecialSpirals,N=2000,RainbowColors]
\end{pspicture}
```

Celle-ci est notée “Trigonometric sums studied by Coutsias and Kazarinoff.” page 24.

$$\omega = .3299;\ p = 1.781237;\ d = \exp(\pi i \omega j^p);\ z = z + d.$$



```
\begin{pspicture}(-2,-2)(12,10)
\psframe(-2,-2)(12,10)
\pstTheodorusSpiral[unit=10,,N=2000,
                    TrigonometricSum,SpecialSpirals,,ConnectPoints,ShowPoints=false]
\end{pspicture}
```

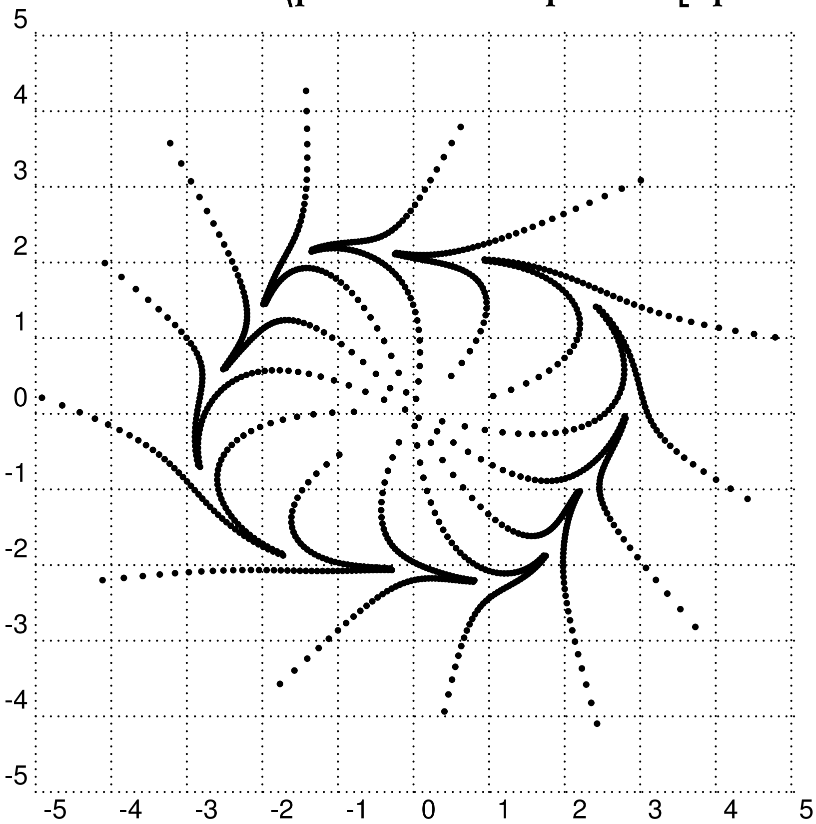
4 La commande \pstTheodorusSpiralAB[options]

Voici les options de cette commande, dont les valeurs par défaut sont indiquées :

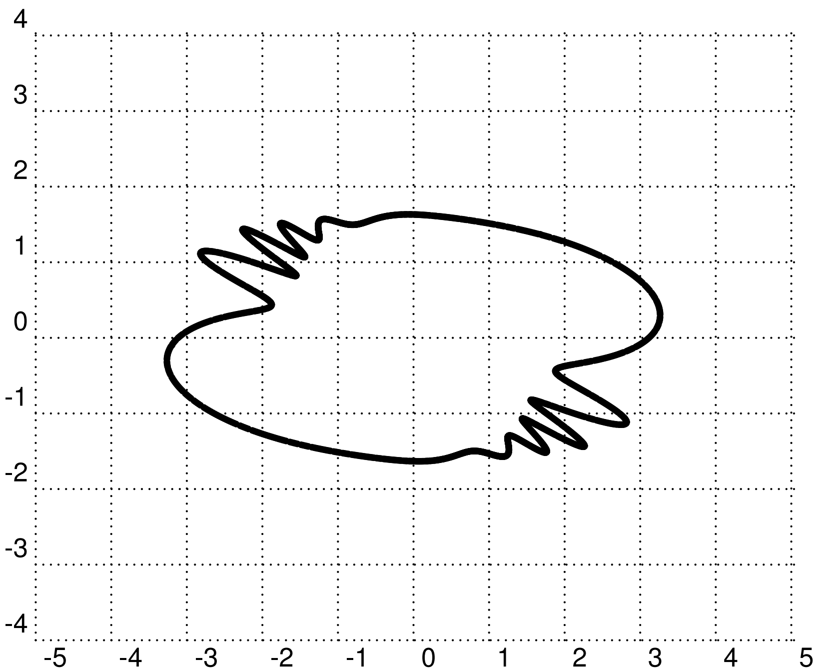
1. `[N=1000]` : nombre d’iterations ;
2. `[V=0.1 0.1]` : vecteur initial (0.1, 0.1 ;
3. `A={[0.91 0.71] [-0.65 0.58]}`[1]. La matrice carrée est donnée ligne par ligne.
4. `B={[-0.91 -0.71] [0.65 -0.58]}`. Ces données de A,B et V correspondent à la figure 35 du livre “ Exhibiting invariant curve” page 55.
5. Le booléen `[ConnectPoints=false]` pour relier les points en écrivant : `[ConnectPoints]`.
6. Le booléen `[ShowPoints=true]` pour marquer les points, on désactive ce marquage avec : `[ShowPoints=false]`.
7. Le booléen `[RainbowColors=false]` pour colorier les points dans le dégradé des couleurs de l’arc-en-ciel.

[1]Les { et } sont nécessaires à cause des crochets pour que le paramètre soit pris en compte.

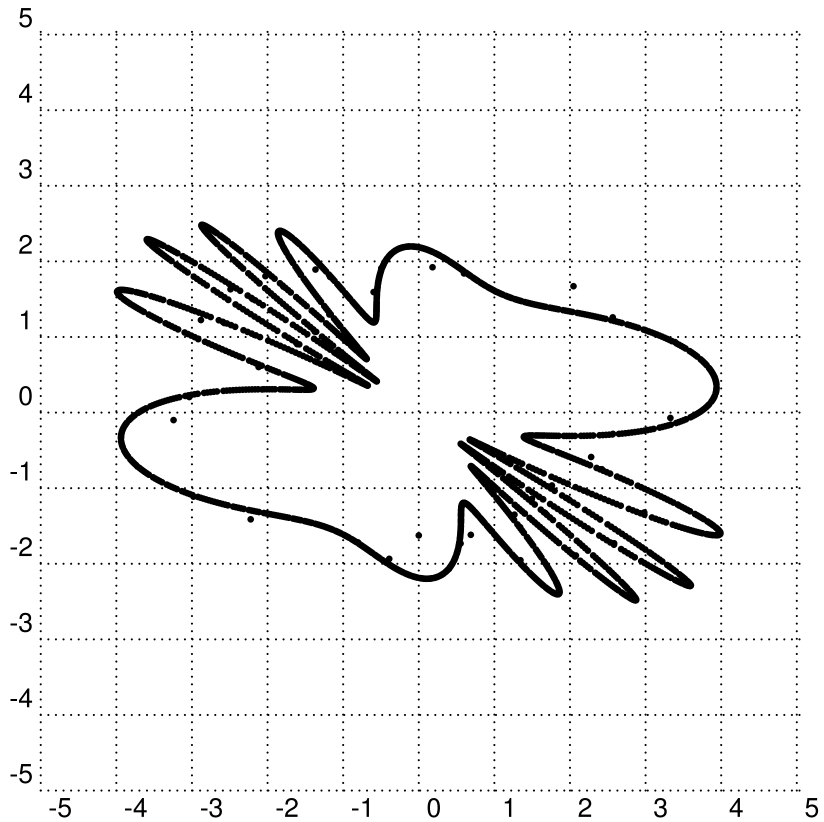
5 Exemples de la commande \pstTheodorusSpiralAB[options]



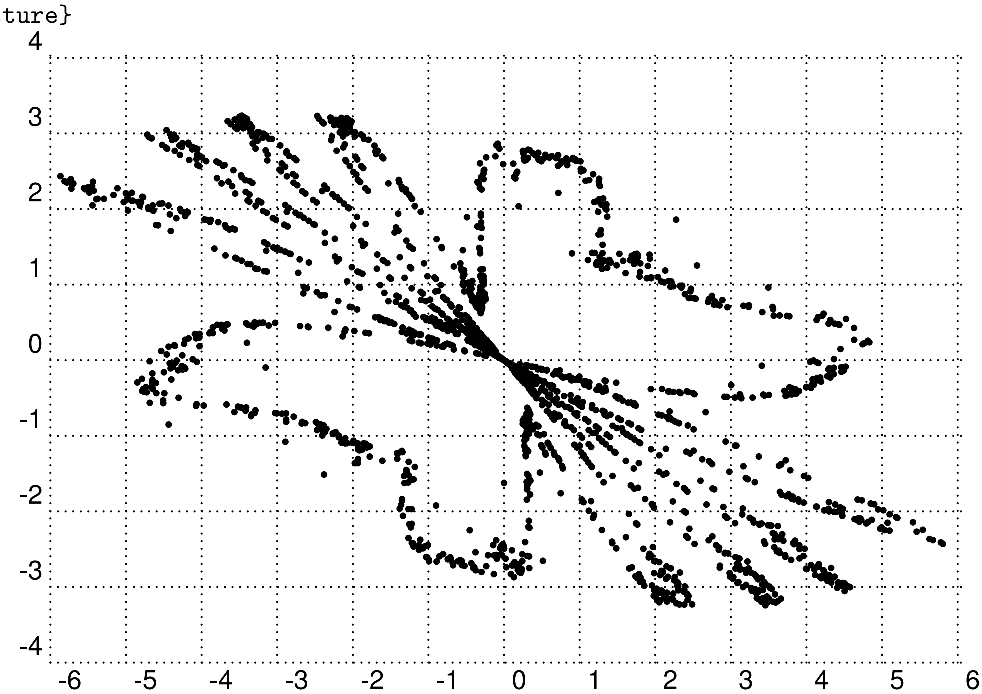

```
% Figure 35: Exhibiting invariant curve. page 55
\begin{pspicture}(-5,-5)(5,5)
\pstTheodorusSpiralAB[unit=5]
\end{pspicture}
```



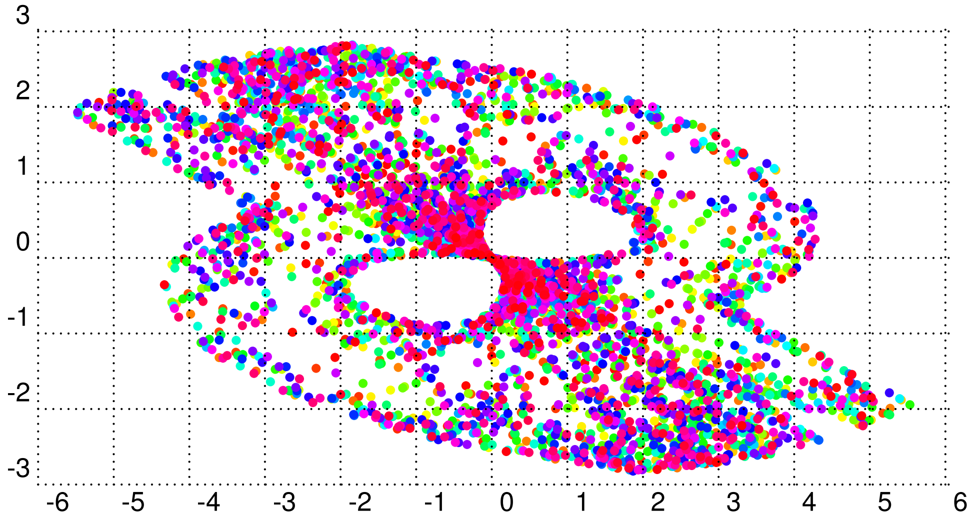

```
\begin{pspicture}(-5,-4)(5,4)
\pstTheodorusSpiralAB[unit=5,
                      A={[1.05 0.496999979] [-0.287 0.406]},
                      B={[-1.05 -0.496999979] [0.287 -0.406]},
                      V=0 -0.325,
                      N=2000]
\end{pspicture}
```



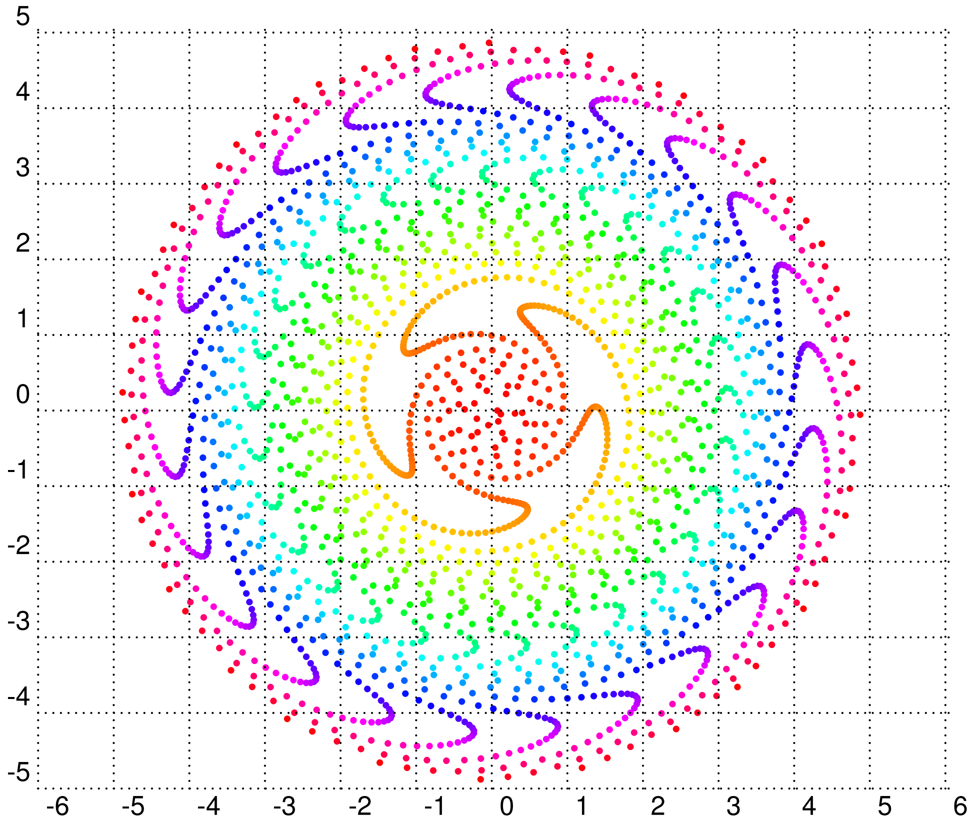

```
% Figure 40: Invariant curve. page 58 (variante)
\begin{pspicture}(-5,-4)(5,4)
\pstTheodorusSpiralAB[unit=5,
                     A={[1.2809999 0.60634] [-0.350139976 0.495319963]},
                     B={[-1.2809999 -0.60634] [0.350139976 -0.495319963]},
                     V=0 -0.325,
                     N=2000]
\end{pspicture}
```



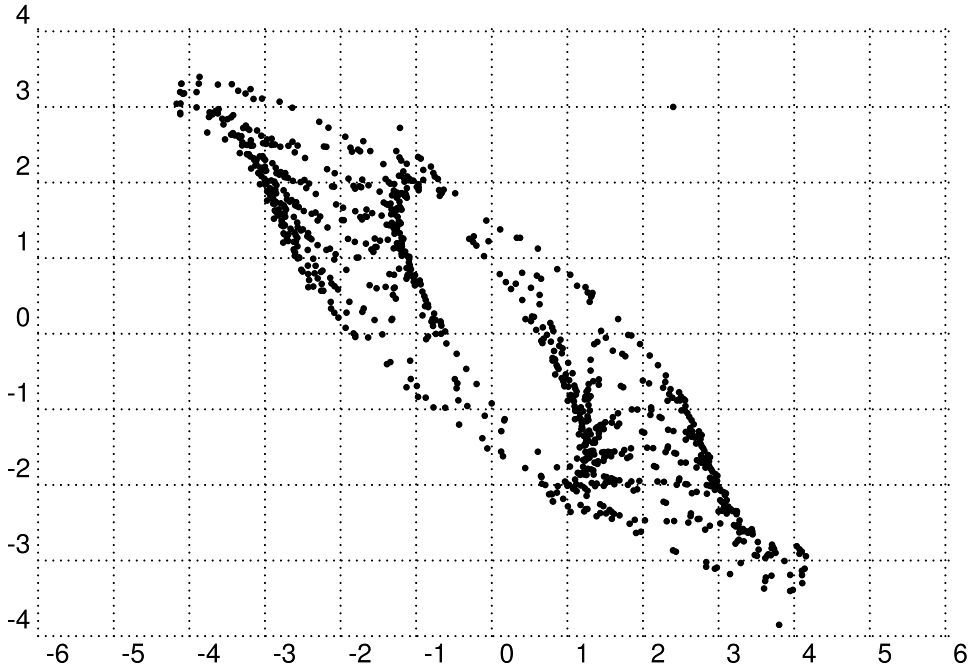

```
% Figure 41a: Butterfly page 59
\begin{pspicture}(-6,-4)(6,4)
\pstTheodorusSpiralAB[unit=5,
                     A={[1.425 0.6745] [-0.3895 0.551]},
                     B={[-1.425 -0.6745] [0.3895 -0.551]},
                     V=0 -0.325,N=2000]
\end{pspicture}
```



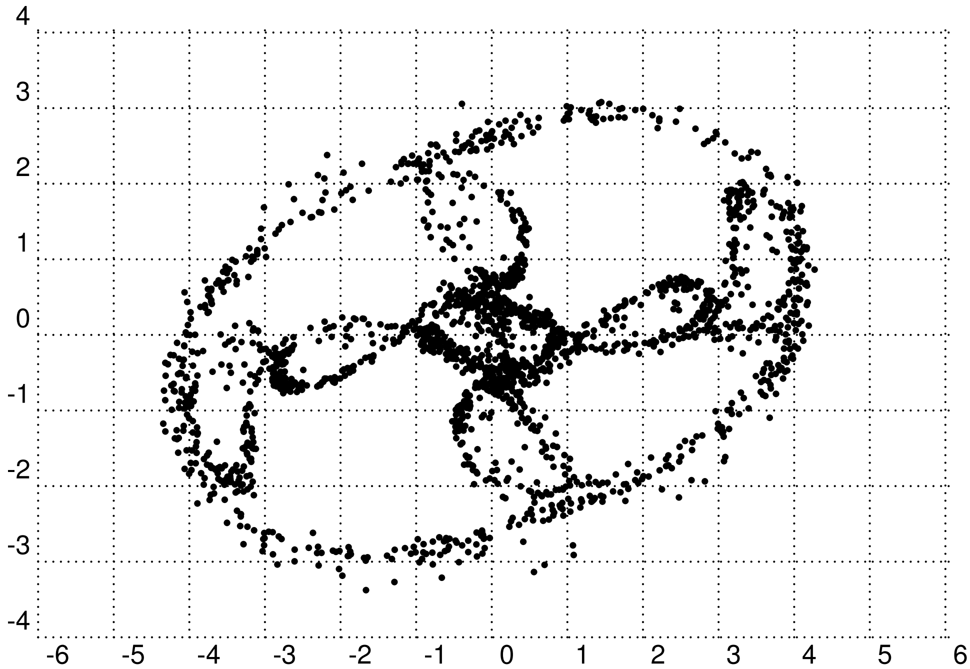

```
% Figure 42: palette page 61
\begin{pspicture}(-6,-3)(6,3)
\pstTheodorusSpiralAB[unit=4,
                    A={[1.5 0.71] [-0.41 0.58]},
                    B={[-1.5 -0.71] [0.41 -0.58]},
                    V=0 -0.325,
                    N=5000,
                    RainbowColors]
\end{pspicture}
```




```
% Figure 34: Penta-fanblade spiral.
\begin{pspicture}(-6,-5)(6,5)
\pstTheodorusSpiralAB[unit=.075,
                       A={[0.2347 0.9721] [-0.9721 0.2347]},
                       B={[1.3747 -0.3319] [0.3319 1.3747]},
                       V=1 0,
                       N=2000]
\psgrid[subgriddiv=0,griddots=10,gridlabels=10pt,gridcolor=black]
\end{pspicture}
```




```
% Figure 37: The double cornucopia spiral. page 56
\begin{pspicture}(-6,-5)(6,5)
\pstTheodorusSpiralAB[unit=6,
                  A={[0.51 -0.1] [0.08 -0.37]},
                  B={[-0.12 0.71] [-0.22 -0.45]},
                  V=0.4 0.5,
                  N=1000]
\psgrid[subgriddiv=0,griddots=10,gridlabels=10pt,gridcolor=black]
\end{pspicture}
```




```
 % Figure 39: Steering wheel page 57
\begin{pspicture}(-6,-5)(6,5)
\pstTheodorusSpiralAB[unit=5,
                     A={[-.1473 .6316] [.8847 .2727]},
                     B={[.1473  -.8847 ] [-.6316 -.2727]},
                     V=0.1 0.1,N=2000]
\psgrid[subgriddiv=0,griddots=10,gridlabels=10pt,gridcolor=black]
\end{pspicture}
```