

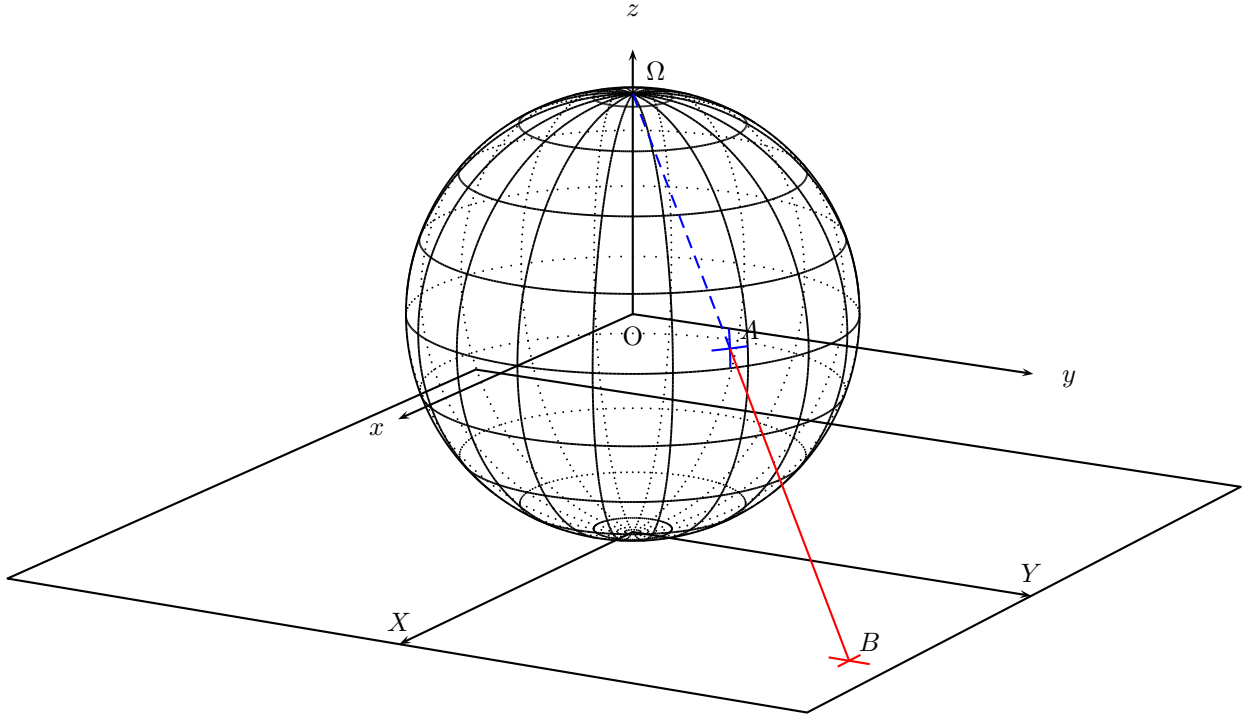
Projection stéréographique inverse

manuel.luque27@gmail.com

12 mars 2021

1 Relations

Avec une sphère de rayon unité. Ω est le pôle nord. Le plan horizontal de projection est tangent au pôle sud.



$$O \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Omega \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad B \begin{pmatrix} X \\ Y \\ -1 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{\Omega A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z-1 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{\Omega B} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{\Omega A} = k \overrightarrow{\Omega B} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z-1 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} X \\ Y \\ -2 \end{pmatrix}$$

Le problème posé est le suivant : on donne les coordonnées d'un point B du plan $z = -1$, il faut en déduire les coordonnées du point A de la sphère $x = f(X, Y); y = g(X, Y); z = h(X, Y)$.

$$\begin{cases} x = kX \\ y = kY \\ 1 - z = 2k \end{cases} \implies \begin{cases} x^2 + y^2 = k^2(X^2 + Y^2) \\ k = \frac{1-z}{2} \end{cases}$$

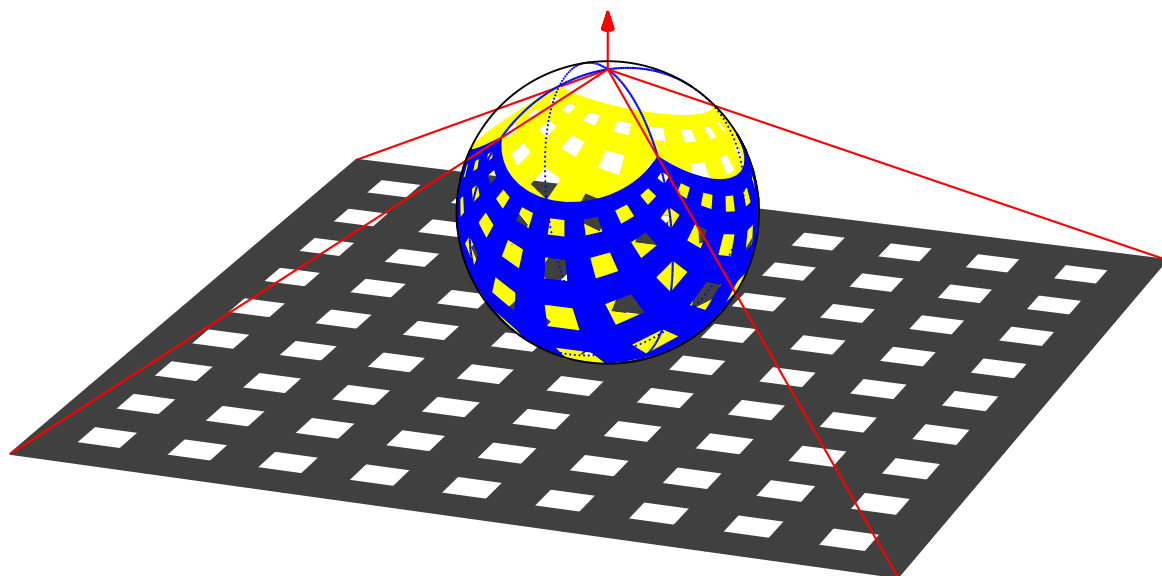
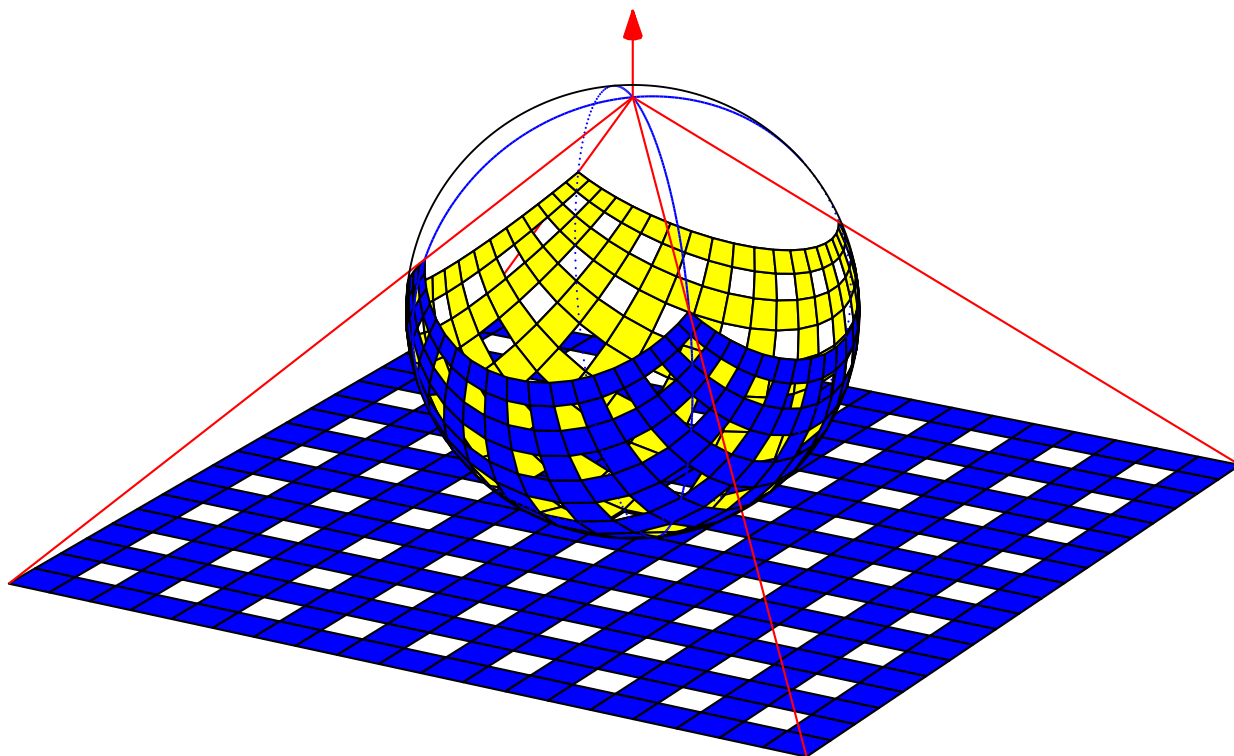
Sachant que $x^2 + y^2 = 1 - z^2$ on a, en remplaçant :

$$1 - z^2 = \frac{(1-z)^2}{4}(X^2 + Y^2) \implies 4(1+z) = (1-z)(X^2 + Y^2)$$

$$\begin{cases} x = \frac{4X}{X^2 + Y^2 + 4} \\ y = \frac{4Y}{X^2 + Y^2 + 4} \\ z = \frac{X^2 + Y^2 - 4}{X^2 + Y^2 + 4} \end{cases}$$

2 Premiers exemples

Les exemples suivants sont réalisés avec la commande `\psInverseStereographicProjection[options]` dont l'utilisation et les options vont être détaillées par la suite.



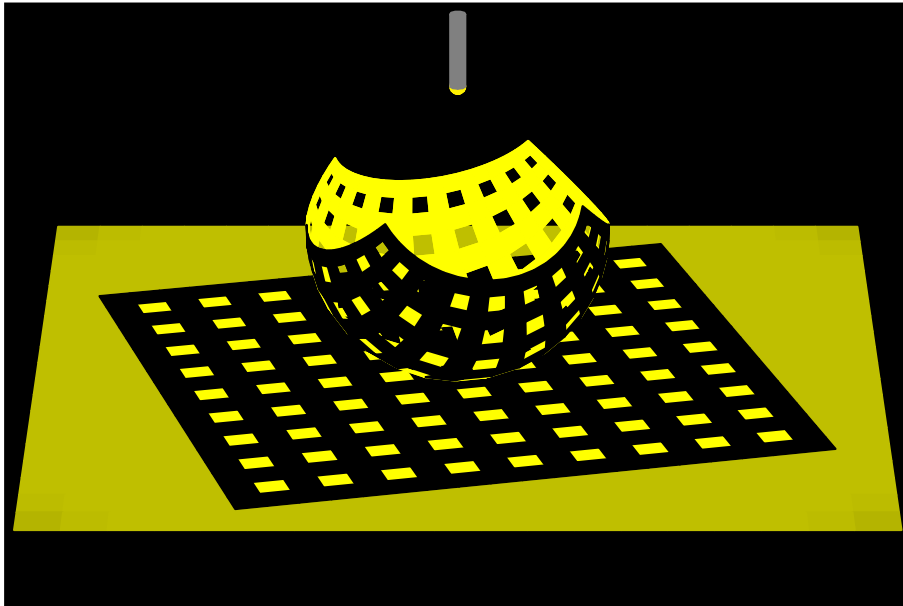
3 La commande `\psInverseStereographicProjection[options]`

La sphère a pour rayon l'unité. Le quadrillage du plan horizontal ($z = -1$) qui va être projeté sur la sphère est déterminé par le paramètre de `ps-solides3d` : `base=[-2 2 -2 2]` par exemple, le carré n'est pas obligatoire, on le verra dans les exemples. Le maillage est fixé par le paramètre de `pst-solides3d` : `ngrid=[13 13]` par exemple.

La couleur de l'intérieur de la sphère sera donné par `[incolor=yellow]`, la lumière émise par la lampe sera de la même couleur. La couleur de l'extérieur de la sphère par `[fillcolor=blue]`, ce sont là aussi 2 exemples. La couleur de l'ombre projetée est déterminée par l'option de `pst-solides3d` : `[color1=black]` (par exemple).

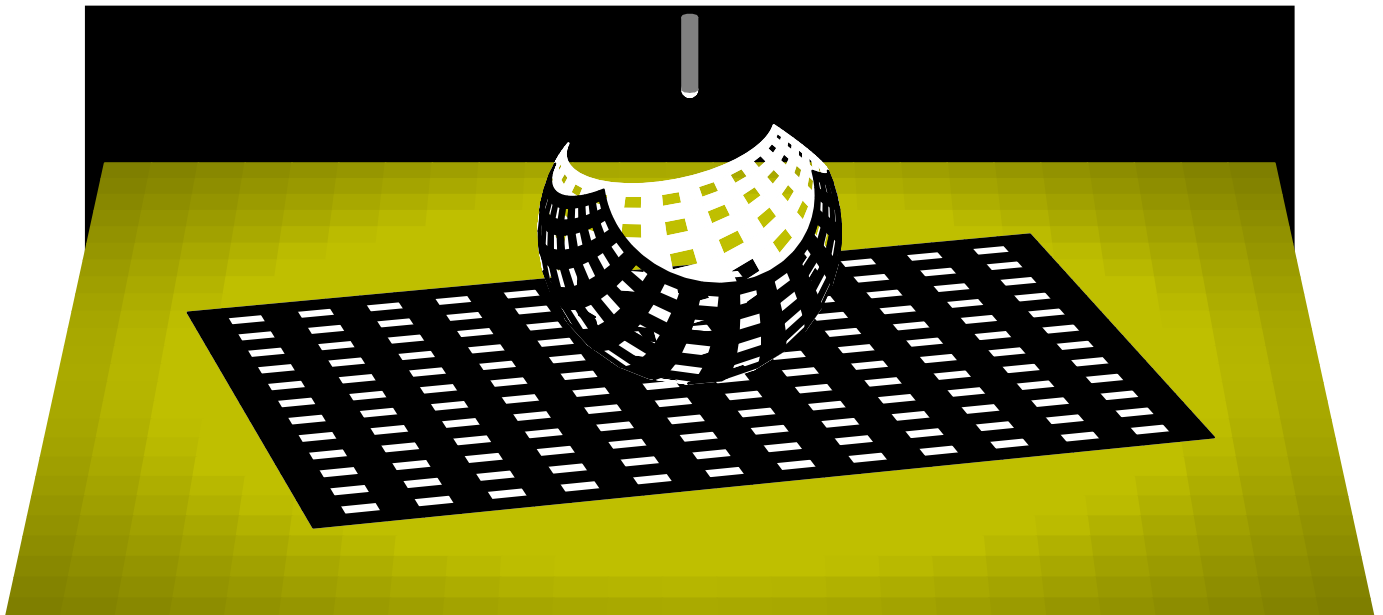
Il existe 2 options supplémentaires, 2 booléens : `[OnlySphere]` pour ne dessiner que la sphère et `[FlashLight=false]` pour ne pas dessiner la lampe.

4 Exemples



La lampe est placée au pôle nord de la sphère [`lightsrc=0 0 1`].

```
\begin{pspicture}[showgrid=(-6,-5)(6,3)
\psframe*[linecolor=black](-6,-5)(6,3)
\psset{viewpoint=50 0 20 rtp2xyz,ngrid=19 19,base=-2 2 -2 2,RotZ=15,color1=black,
Decran=100,lightsrc=0 0 1,incolor=yellow,fillcolor=blue,grid}
% support, ne doit pas tourner d'où RotZ=0
\psSolid[object=plan,definition=normalpoint,args={0 0 -1 [0 0 1]},
base=-2.8 2.8 -2.8 2.8,fillcolor={[cmymk]{0 0 1 0.25}},RotZ=0]%
\psSolid[object=plan,definition=normalpoint,args={0 0 -1 [0 0 1]},fillcolor=yellow]%
\psInverseStereographicProjection
\end{pspicture}
```



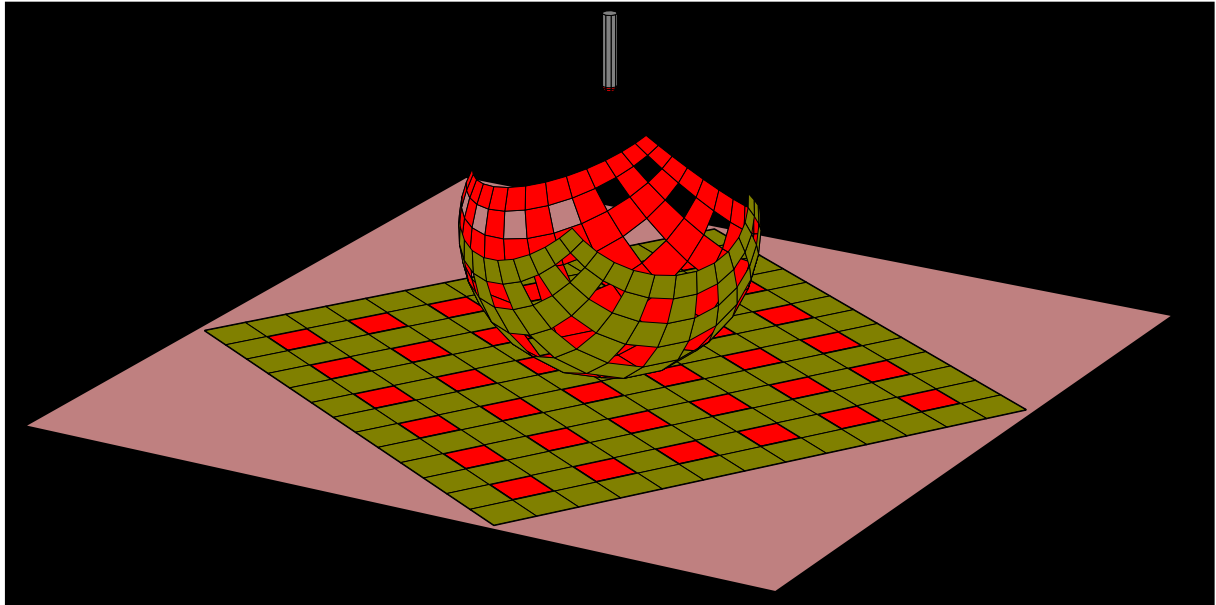
Le quadrillage est un rectangle [`base=-2 2 -3 3`] La couleur de la surface extérieure de la sphère est sans importance la lampe étant placée en $z = 1$, elle n'est pas éclairée.

```
\begin{pspicture}[showgrid=(-6,-5)(6,3)
\psframe*[linecolor=black](-6,-5)(6,3)
\psset{viewpoint=50 0 20 rtp2xyz,ngrid=25 25,base=-2 2 -3 3,RotZ=15,color1=black,
Decran=100,lightsrc=0 0 1,incolor=white,fillcolor=white,grid}
```

```

\psSolid[object=plan,definition=normalpoint,args={0 0 -1 [0 0 1]},
        base=-4.2 4.2 -4.2 4.2,fillcolor={cmyk}{0 0 1 0.25}},RotZ=0]%
\psSolid[object=plan,definition=normalpoint,args={0 0 -1 [0 0 1]},fillcolor=white]%
\psInverseStereographicProjection
\end{pspicture}

```

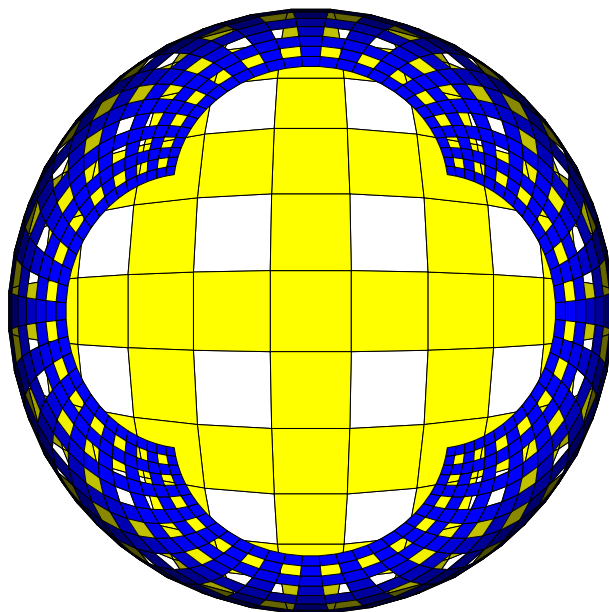


```

\begin{pspicture}[showgrid=(-8,-4)(8,3)]
\psframe*(-8,-5)(8,3)
\psset{viewpoint=50 30 20 rtp2xyz,ngrid=13 13,base=-2 2 -2 2,RotZ=60,color1={rgb}{0.5 0.5 0}},
        Decran=100,lightsrc=,incolor=red,fillcolor={rgb}{0.5 0.5 0}}
\psSolid[object=plan,definition=normalpoint,args={0 0 -1 [0 0 1]},
        base=-2.8 2.8 -2.8 2.8,fillcolor={rgb}{0.75 0.5 0.5}},RotZ=0,ngrid=1 1]%
\psSolid[object=plan,definition=normalpoint,args={0 0 -1 [0 0 1]},fillcolor=red]%
\psInverseStereographicProjection[linewidth=0.01]
\end{pspicture}

```

Dans les 2 exemples suivants, on ne représente que la sphère, on se place au-dessus sur l'axe Oz . D'abord, très haut.



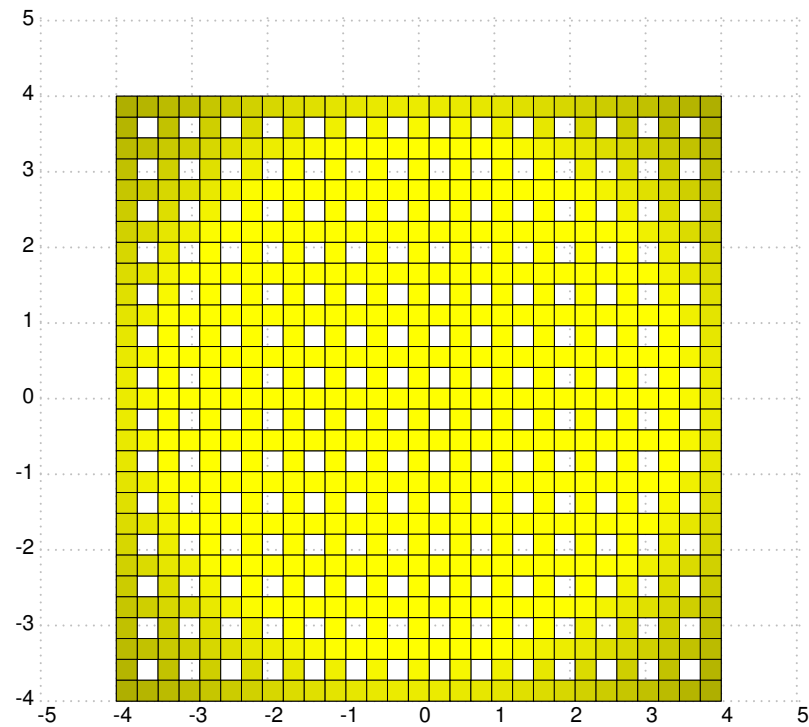
```

\begin{pspicture}[showgrid=(-5,-4)(5,5)]
\psset{viewpoint=50 30 90 rtp2xyz,ngrid=30 30,,base=-4 4 -4 4,RotZ=0,
        Decran=200,lightsrc=viewpoint,incolor=yellow,fillcolor=blue}

```

```
\psInverseStereographicProjection[linewidth=0.01,OnlySphere,FlashLight=false]%
\end{pspicture}
```

Puis au niveau du pôle nord :



```
\begin{pspicture}[showgrid](-5,-4)(5,5)
\psset{viewpoint=0 0 1,ngrid=30 30,,base=-4 4 -4 4,RotZ=0,
Decran=2,lightsrc=0 0 1,incolor=yellow,fillcolor=blue}
\psInverseStereographicProjection[OnlySphere,linewidth=0.01,FlashLight=false]%
\end{pspicture}
```