

CALCUL PAR EXPONENTIATION RAPIDE DE TERMES DE LA SUITE DITE DE PADOVAN

JEAN-FRANÇOIS BURNOL

On considère des suites vérifiant la récurrence

$$u_n = u_{n-2} + u_{n-3}$$

Supposons donnée une telle suite (u_n) et considérons la formule matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \\ u_{n-1} \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \\ u_{n-2} \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On en déduit par récurrence

$$\begin{pmatrix} u_{n+k} \\ u_{n-1+k} \\ u_{n-2+k} \end{pmatrix} = P^k \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \\ u_{n-2} \end{pmatrix}$$

Maintenant considérons la suite avec $u_0, u_1, u_2 = 0, 0, 1$. On calcule $u_3, u_4 = 0, 1$. Donc la matrice P elle-même peut s'écrire avec cette suite particulière :

$$P = \begin{pmatrix} u_3 & u_4 & u_2 \\ u_2 & u_3 & u_1 \\ u_1 & u_2 & u_0 \end{pmatrix}$$

Par récurrence (la multiplication à gauche agissant colonne par colonne) :

$$P^k = \begin{pmatrix} u_{2+k} & u_{3+k} & u_{1+k} \\ u_{1+k} & u_{2+k} & u_k \\ u_k & u_{1+k} & u_{-1+k} \end{pmatrix}$$

Nous nous intéressons en particulier¹ aux

$$Q_n = P^{2^n} = \begin{pmatrix} u_{2+2^n} & u_{3+2^n} & u_{1+2^n} \\ u_{1+2^n} & u_{2+2^n} & u_{2^n} \\ u_{2^n} & u_{1+2^n} & u_{-1+2^n} \end{pmatrix}$$

car on peut les évaluer par la récurrence $Q_{n+1} = Q_n^2$, $Q_0 = P$.

Si l'on écrit

$$Q = \begin{pmatrix} b & a & c \\ c & b & d \\ d & c & e \end{pmatrix}, \quad Q^2 = \begin{pmatrix} B & A & C \\ C & B & D \\ D & C & E \end{pmatrix}$$

Date: v1 Vendredi 2 juillet 2021. v2 Samedi 3 juillet 2021.

1. Mais on peut généraliser, d'où le titre.

alors (en utilisant peut-être aussi $a = c + d$, $b = d + e$) on peut montrer les formules suivantes

$$A = 2ab + c^2$$

$$B = a^2 + b^2 - d^2$$

$$C = 2bc + d^2$$

$$D = b^2 + c^2 - e^2$$

$$E = 2cd + e^2$$

On y a privilégié la symétrie plutôt que l'efficacité calculatoire. Attention l'auteur n'a pas re-vérifié ses calculs (la vie est si courte), c'est laissé au lecteur.

On peut aussi se ramener (puisque $b = d + e$) à une récurrence seulement sur les trois c, d, e :

$$C = 2c(d + e) + d^2$$

$$D = c^2 + d^2 + 2ed$$

$$E = 2cd + e^2$$

En prenant les valeurs initiales $c, d, e = 1, 0, 0 = u_2, u_1, u_0$ on obtient successivement :

$$Q_0 \leftarrow \begin{cases} c = 1 \\ d = 0 \\ e = 0 \end{cases}$$

$$Q_1 \leftarrow \begin{cases} c = 0 \\ d = 1 \\ e = 0 \end{cases}$$

$$Q_2 \leftarrow \begin{cases} c = 1 \\ d = 1 \\ e = 0 \end{cases}$$

$$Q_3 \leftarrow \begin{cases} c = 3 \\ d = 2 \\ e = 2 \end{cases}$$

$$Q_4 \leftarrow \begin{cases} c = 28 \\ d = 21 \\ e = 16 \end{cases}$$

$$Q_5 \leftarrow \begin{cases} c = 2513 \\ d = 1897 \\ e = 1432 \end{cases}$$

$$Q_6 \leftarrow \begin{cases} c = 20330163 \\ d = 15346786 \\ e = 11584946 \end{cases}$$

$$Q_7 \leftarrow \begin{cases} c = 1330576843394428 \\ d = 1004422742303477 \\ e = 758216295635152 \end{cases}$$

$$Q_8 \leftarrow \begin{cases} c = 5699518419544781751088575407953 \\ d = 4302439163276003560611653783721 \\ e = 3247815234742163073775871715416 \end{cases}$$

$$Q_9 \leftarrow \begin{cases} c = 104576610781198194908521214869043644580461076281194715293478963 \\ d = 78942547890499622806194589585521743740897532350978854871341922 \\ e = 59591966319148133862268430278954583352857735928658733702719282 \end{cases}$$

Et nous nous arrêtons là par uniquement par faute de place sur la page, on peut bien sûr aller plus loin avec une bonne calculatrice ². La matrice Q_9 est P_{512} . On en déduit

$$u_{515} = 183519158671697817714715804454565388321358608632173570164820885$$

$$u_{514} = 138534514209647756668463019864476327093755268279637588574061204$$

$$u_{513} = 104576610781198194908521214869043644580461076281194715293478963$$

$$u_{512} = 78942547890499622806194589585521743740897532350978854871341922$$

$$u_{511} = 59591966319148133862268430278954583352857735928658733702719282$$

qui ont respectivement 63, 63, 63, 62, 62 chiffres.

On constate que leurs quotients successifs ont les mêmes premiers 90 chiffres après la virgule. Mais il nous manque de la place... alors on met sur deux lignes :

$$\Phi = 1.324717957244746025960908854478097340734404056901733364534015 \\ 050302827851245547594054699347\dots$$

Avec la valeur approchée ci-dessus on peut calculer $\Phi^3 - \Phi - 1$. Ceci donne approximativement $-4.186962433438214 \cdot 10^{-90}$ confirmant qu'on a une valeur approchée de la vraie racine de $x^3 - x - 1 = 0$, avec au moins 89 chiffres corrects après la virgule.

Il suffit de calculer un cran de plus pour confirmer... ³

2. du type « précision arbitraire »...

3. On aura u_{1027} avec 125 chiffres et on peut en espérer (par induction confiante) au moins 180 chiffres corrects pour $\Phi \approx u_{1027}/u_{1026}$. La première ligne confirme notre résultat du corps du texte, la ligne suivante donne 90 chiffres supplémentaires.

1.324717957244746025960908854478097340734404056901733364534015050302827851245547594054699347
981787280329910920994742207425108902639045897795594314757096723471754166839038867418751736...

Et avec cette valeur $\Phi^3 - \Phi - 1$ vaut environ $-3.972864948795583 \cdot 10^{-180}$. OK !