Le nombre plastique avec xint et pst-solides3d

2 juillet 2021

1 Présentation

La revue Tangente vient de sortir son deux-centième numéro ! Il y a un article examinant le nombre 200.sous différents aspects, il y en a peu, mais il se trouve que 200 est l'un des termes de la suite de Padovan, dont on sait que le rapport de deux termes consécutifs tend vers le Nombre Plastique : https://fr.wikipedia.org/wikiNombre_plastique
et ainsi l'auteur de l'article Daniel Lignon, trouve le prétexte pour donner quelques aspects de cette suite dans un paragraphe intitulé "*La géométrie du plastique*". Dans le "*Pour la Science*" n°206 d'août 1996, Ian Stewart, dans un article intitulé "*La sculpture et les nombres*" sous-titré : "*Comme le nombre d'or, le nombre plastique inspire les sculpteurs*" développe de façon plus détaillée cette "*géométrie*".
« Une autre façon de construire les nombres de Padovan consiste à reproduire l'utilisation des carrés pour les nombres de Fibonacci, mais avec des parallélépipèdes. Partons d'un cube de côté égal à 1, et plaçons à côté de lui un autre cube identique, adjacent par une face. On obtient un parallélépipède dont deux côtés sont égaux à 1, et le troisième côté est égal à 2 (parallélépipède $1 \times 1 \times 2$). Contre la face 1×2, plaçons un autre parallélépipède $1 \times 1 \times 2$. Nous obtenons un parallélépipède $1 \times 2 \times 2$. Puis, contre une face 2×2, plaçons un cube $2 \times 2 \times 2$, afin de former au total un parallélépipède $2 \times 2 \times 3$. Contre une face 2×3, plaçons un parallélépipède $2 \times 2 \times 3$, afin d'obtenir un parallélépipède $2 \times 3 \times 4$, et ainsi de suite en ajoutant successivement des parallélépipèdes à l'Est, au Sud, en bas, à l'Ouest, au Nord, et en haut. À chaque étape, le nouveau parallélépipède a pour longueur des côtés trois nombres de Padovan consécutifs. »
Nous allons d'abord donner 3 façons de calcule Ψ avec une précision aussi grande que l'on veut. Jean-François Burnol, a apporté son concours décisif à la mise au point de ces méthodes, puis la représentation géométrqque de la suite selon Ian Stewart.

2 Le calcul du nombre plastique avec xintexpr

2.1 Méthode avec les racines cubiques

$$\Psi = \sqrt[3]{1+\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{1+\cdots}}}}}}}$$

```
% Ne pas oublier le * !
% Sinon les puissances fractionnaires calculées avec seulement 16 chiffres de précision!
\xintDigits* := 64;% de toute façon la précision de racine cubique pas au-delà
                   % de 62 chiffres, et 64 chiffres sont conservés au max
\xintdeffloatfunc cbrt(x):=x^(1/3);%
\xintdeffloatfunc plast(x):=(x+1)^(1/3);%

\pdfresettimer
\xintdeffloatvar n := 1;%
\def\x{0}%
\xintloop
\edef\x{\the\numexpr\x+1}%
\xintdeffloatvar m:=plast(n);%
\xintifboolexpr{abs(n-m)>1e-62}{\xintdeffloatvar n:=m;\iftrue}{\xintdeffloatvar n:=m;\iffalse}%
```

```
\repeat
\edef\tempsA{\strip@pt\dimexpr\pdfelapsedtime sp}%
$\Psi=\xinteval{n}\quad (\x\textrm{ itérations}, \tempsA s)$
```

$\Psi = 1.3247179572447460259609088544780973407344040569017333645340150 5 \quad (87 \text{ itérations}, 2.72299s)$

2.2 Méthode par calculs exacts de 100 décimales

$$u_0 = 1 \ ; \ u_1 = 1 \ ; \ u_2 = 1 \ ; \ u_n = u_{n-2} + u_{n-3}$$

$$U_0 = (a_0 = 1, b_0 = 1, c_0 = 1); U_{n+1} = (b_n, c_n, a_n + b_n); \Psi_n = \frac{c_n}{b_n}$$

```
\pdfresettimer
\xintdefvar a, b, c := 1, 1, 1;%
\xintiloop [1+1]%
\xintdefvar a, b, c := b, c, a + b ;%
% là aussi faudrait peut-être chercher un critère d'arrêt
% J'ai voulu déterminer par dichotomie en partant de 300 et en réduisant...
% ... c'est rapide mais en fait faut pas baisser en-dessous de 2 * 267
% itérations...
% faudrait faire ça de manière dynamique comme avec les racines cubiques
% mais ça ralentirait...
\ifnum\xintiloopindex<534
\repeat
% afficher la fraction avec 98 chiffres après la virgule (expansion décimale
% sans arrondi juste troncation)
\edef\chiffres{\xinteval{trunc(c/b,98)}}%
\edef\tempsC{\strip@pt\dimexpr\pdfelapsedtime sp}%
\makeatother
Obtenu en \tempsC s et 534 itérations :\newline
$\Psi=\chiffres...\relax$
\makebox[2.5cm][l]{numérateur :} \xinteval{c}
\makebox[2.5cm][l]{dénominateur :} \xinteval{b}
Fraction irréductible :
$\xintTeXFrac{\xinteval{reduce(c/b)}}$
Facteur commun :
$\xinteval{gcd(c,b)}$
```

Obtenu en 0.185s et 534 itérations :
$\Psi = 1.32471795724474602596090885447809734073440405690173336453401505030282785124554759405469934798178728...$
numérateur : 20738005991968306975800701572692464230692683604891680975627452920 2
dénominateur : 15654657565826966251945867354083050921321525659444100136756251569 0
Fraction irréductible :
$\frac{241139604557771011346519785728982142217356786103391639251482010 7}{182030901928220537813324039000965708387459600691210466706468041 5}$
Facteur commun :
86

2.3 Le nombre plastique par résolution de l'équation avec 98 puis 199 décimales

Racine réelle de $x^3 = 1 + x$
On aborde le problème avec `polexpr`. Voyons déjà si on peut se souvenir de ses commandes...

```
\poldef f(x) := x^3 - x -1;

\PolToSturm{f}{f}
```

```
\PolSturmIsolateZeros{f}

Le polynôme \PolTypeset{f} possède \PolSturmNbOfIsolatedZeros{f} racines réelles distinctes
qui sont situées dans les intervalles suivants : \PolPrintIntervals{f}
```

Le polynôme $x^3 - x - 1$ possède 1 racine réelle située dans l' intervalle :

$$1.3 \quad < \quad Z_1 \quad < \quad 1.4$$

```
La racine a été trouvée avec une décimale. La voici avec neuf autres, donc 10 décimales :
\PolRefineInterval[9]{f}{1}
$$\PolSturmIsolatedZeroLeft{f}{1}<Z_1<\PolSturmIsolatedZeroRight{f}{1}$$
```

La racine a été trouvée avec une décimale. La voici avec neuf autres, donc 10 décimales :

$$1.3247179572 < Z_1 < 1.3247179573$$

```
Assurons-nous que pour 98 décimales que l'erreur est ${}<10^{E}, E=-98$):
\PolEnsureIntervalLength{f}{1}{-98}\newline
$\Psi = \PolSturmIsolatedZeroLeft{f}{1}...$
```

Assurons-nous que, pour 98 décimales, l'erreur est $<10^E, E=-98$):
$\Psi = 1.32471795724474602596090885447809734073440405690173336453401505030282785124554759405469934798178728...$
$\Psi = 1.32471795724474602596090885447809734073440405690173336453401505030282785124554759405469934798178728$
et obtenons maintenant 199 décimales.
$\Psi = 1.32471795724474602596090885447809734073440405690173336453401505030282785124554759405469934798178728$
$03299109209947422074251089026390458977955943147570967234717541668390388674187517369315842535499082466...$

2.4 Calculer le nombre plastique avec 499 chiffres après la virgule, avec xintsession

Voici la séquence proposée par Jean-François Burnol :

```
Starting in exact mode (floating point evaluations use 16 digits)
>>> a,b,c,d,e := 1,0,1,0,0;
@_1     1, 0, 1, 0, 0
>>> a, b, c, d, e := 2a*b+sqr(c), sqr(a)+sqr(b)-sqr(d), 2b*c+sqr(d), sqr(b)+sqr(c)-sqr(e), 2c*d+sqr(e);
```

vous répéterez la dernière séquence, disons 19 fois. Si vous souhaitez utiliser ce calculateur, rendez vous sur : xintsession. La méthode utilisée est celle mise au point par Jean-François Burnol qu'il a intitulée "Calcul par exponentiation rapide des termes de la suite dite de Padovan", les fichiers "padovan-jfbu.tex, padovan-jfbu.pdf" sont dans l'archive : Nombre-Plastique.zip.

2.5 Calculer le nombre plastique avec 6000 chiffres après la virgule

Le fichier "Phi6000.tex" est à compiler par : `etex Phi6000.tex`. Le préambule suivant débute la compilation :
«

```
Bienvenue ! Nous allons calculer Phi avec 6000 chiffres après la virgule.
Un peu de patience est demandée car cela prend environ (sur ma machine à 2GHz) 35
secondes pour trouver Phi puis près de 40 secondes pour valider que Phi^3 = Ph
i + 1 à cette précision.
Vous trouverez après compilation les valeurs dans le fichier Phi6000-out.txt
```

»

3 La géométrie plastique

C'est la méthode de Ian Stewart qui est utilisée.

$$1 \times 1 \times 1$$