

La voie-sans-effort™ vers le cubisme

Jean-François Burnol

27 février 2021

La voie-sans-effort™¹ est une nouvelle avancée dans la théorie des équations, qui a été développée par un réseau européen (malheureusement pas vraiment financé) auquel l'auteur a adhéré.

En quasi avant-première mondiale (voir [1] pour l'article princeps de ce nouveau chapitre des Mathématiques), je vais en donner une application à un cas particulier du problème suivant : *étant donnée une équation cubique $P = 0$ à coefficients rationnels, quelles sont les valeurs de u telles que $P = u$ ait trois racines rationnelles?* Il faut comme condition nécessaire d'existence que P ait deux extrema locaux, c'est-à-dire que $P' = 0$ ait un discriminant strictement positif (si non la fonction polynomiale $x \mapsto P(x)$ serait strictement monotone et l'équation $P = u$ n'aurait jamais qu'une seule solution réelle pour tout u réel). Nous allons faire cette hypothèse, et même plus : nous supposons que les deux racines de P' sont rationnelles. Quitte à faire un changement affine rationnel, on peut alors les supposer par exemple en $-\frac{1}{2}$ et $+\frac{1}{2}$. Donc, après cette transformation de la variable, P à une constante multiplicative près est une primitive de $X^2 - \frac{1}{4}$, soit encore $P = A\frac{1}{3}X^3 - A\frac{1}{4}X + B$ avec A et B rationnels.

Sans perte de généralité on va prendre $A = 12$ et donc au final étudier l'équation $4x^3 - 3x = u$. Pour $u = -1$, elle possède les racines -1 et $\frac{1}{2}$ (avec multiplicité deux) et pour $u = +1$ les racines $-\frac{1}{2}$ (avec multiplicité deux) et $+1$. Notons par contre que pour $u = 0$, l'équation $4x^3 - 3x = 0$ ne possède qu'une seule solution rationnelle.

Le tableau de variation de $P(x) = 4x^3 - 3x$ est rapidement obtenu (voir la [Figure 1](#)) et avec un ordinateur moderne on peut aussi visualiser son graphe (voir la [Figure 2](#) et la [Figure 3](#)).

Pour $-1 < u < 1$ le tableau de variation démontre que l'équation $4x^3 - 3x = u$ (on a décidé pour des raisons qui ne seront pas communiquées d'utiliser la variable r plutôt que x ici) a trois racines réelles distinctes $r_1 < r_2 < r_3$. Lorsque u croît de -1 à 1 , r_1 croît de -1 à $-\frac{1}{2}$, r_2 décroît de $+\frac{1}{2}$ à $-\frac{1}{2}$ et r_3 croît de $+\frac{1}{2}$ à $+1$. Nous allons établir une condition nécessaire et suffisante sur u , sous la forme d'une paramétrisation, pour que r_1, r_2, r_3 soient rationnels.

Notons ici $r = r_1$. Comme r_2 et r_3 sont solutions de $4x^3 - 3x = u = 4r^3 - 3r$, on

1. marque déposée à Stuttgart (Allemagne) et Lille (France), tous droits réservés. L'auteur remercie Jürgen Gilg pour la collaboration dont ce travail est issu.

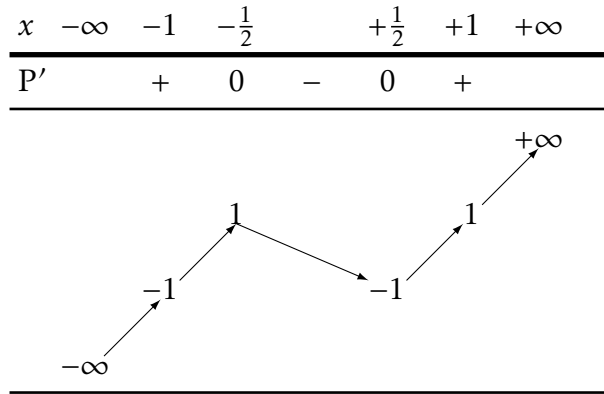


FIGURE 1 – Tableau de variation de $4x^3 - 3x$

a en faisant la différence qu'elles sont solutions de

$$4(x-r)(x^2+rx+r^2)-3(x-r)=0 \implies x^2+rx+r^2-\frac{3}{4}=0$$

Ainsi :

$$r_2 = \frac{-r - \sqrt{\Delta}}{2}$$

$$r_3 = \frac{-r + \sqrt{\Delta}}{2}$$

$$\Delta = 3(1-r^2)$$

Il est nécessaire et suffisant que Δ soit le carré d'un nombre rationnel pour que r_2 et r_3 soient rationnels.

C'est ici où la voie-sans-effortTM intervient (en fait, elle était déjà intervenue discrètement lorsque l'on a choisi une racine r et décider d'exprimer les autres à partir d'elle). Pour que $\Delta = 3(1-r^2)$ soit le carré d'un rationnel, sachant déjà que r est rationnel, il est nécessaire et suffisant que $3\frac{1+r}{1-r} = \Delta/(1-r)^2$ soit le carré d'un rationnel :

$$3\frac{1+r}{1-r} = s^2, \quad s \in \mathbb{Q}$$

Ce qui nous donne :

$$r = \frac{s^2-3}{s^2+3}, 1-r = \frac{6}{s^2+3}, 1+r = \frac{2s^2}{s^2+3}, \Delta = \frac{36s^2}{(s^2+3)^2} = \left(\frac{6s}{s^2+3}\right)^2$$

Puis

$$r_1 = \frac{-3+s^2}{3+s^2}$$

$$r_2 = \frac{1}{2} \frac{3-6s-s^2}{3+s^2}$$

$$r_3 = \frac{1}{2} \frac{3+6s-s^2}{3+s^2}$$

Lorsque r varie de -1 à $-\frac{1}{2}$, la quantité $3\frac{1+r}{1-r}$ varie de manière strictement croissante de 0 à 1. Donc la quantité $s(u)$, qui est déterminée de manière unique

comme la quantité positive telle que $s(u)^2 = 3(1 + r_1(u))/(1 - r_1(u))$, varie de 0 à 1 et les formules ci-dessus donnent les valeurs de $r_2(u)$ et $r_3(u)$.

Si s est rationnel r_1, r_2, r_3 le sont, et réciproquement aussi par le raisonnement fait, ou, si le lecteur doute, par :

$$s = \frac{r_3 - r_2}{1 - r_1}$$

La voie-sans-effortTM nous a menés à la solution du problème initialement posé et il est temps d'énoncer notre théorème.

Théorème 1. Soit $s \in]0, 1[$. Les applications qui à s associent respectivement :

$$\begin{aligned} r_1 &= -\frac{3 - s^2}{3 + s^2} \\ r_2 &= \frac{1}{2} \frac{3 - 6s - s^2}{3 + s^2} \\ r_3 &= \frac{1}{2} \frac{3 + 6s - s^2}{3 + s^2} \\ u = 4r_1r_2r_3 &= -\frac{(3 - s^2)(3 + 6s - s^2)(3 - 6s - s^2)}{(3 + s^2)^3} \end{aligned}$$

sont strictement monotones : r_1 croît de -1 à $-\frac{1}{2}$, r_2 décroît de $\frac{1}{2}$ à $-\frac{1}{2}$, r_3 croît de $\frac{1}{2}$ à 1 , et u croît de -1 à 1 . De plus $4(X - r_1)(X - r_2)(X - r_3) = 4X^3 - 3X - u$ et r_1, r_2, r_3 sont tous les trois rationnels si et seulement si s est rationnel.

Démonstration. Tout a déjà été démontré. □

Nous allons examiner s du point de vue des racines réelles. Comme il est bien connu $4\cos^3\phi - 3\cos\phi = \cos 3\phi$. Pour $-1 < u < 1$, il existe un ϕ unique vérifiant $\cos 3\phi = u$ et $-\pi < \phi < -\frac{2\pi}{3}$, donc $-3\pi < 3\phi < -2\pi$. Alors $x = r_1 = \cos\phi$ est la solution unique dans $] -1, -\frac{1}{2}[$ de $4x^3 - 3x = u$, et lorsque ϕ croît de $-\pi$ à $-2\pi/3$, u croît de -1 à 1 , r_1 croît de -1 à $-\frac{1}{2}$. On vérifie que $r_2 = \cos(\phi - \frac{2\pi}{3})$ (décroît de $\frac{1}{2}$ à $-\frac{1}{2}$) et $r_3 = \cos(\phi + \frac{2\pi}{3})$ (croît de $\frac{1}{2}$ à 1). Ainsi :

$$s = \frac{r_3 - r_2}{1 - r_1} = \frac{-2\sin\phi\sin(\frac{2\pi}{3})}{2\sin^2\frac{\phi}{2}} = -\sqrt{3}\cotg\frac{\phi}{2} = \sqrt{3}\cotg\frac{-\phi}{2} = \sqrt{3}\tg(\frac{\pi}{2} - \frac{-\phi}{2}) = \sqrt{3}\tg\alpha,$$

avec $\alpha = \frac{\pi + \phi}{2}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{6}$, $0 < \tg\alpha < (\sqrt{3})^{-1}$, $0 < s < 1$. L'expression de u en fonction de s est donc celle de $\cos 3\phi = \cos(6\alpha - 3\pi) = -\cos 6\alpha$ en fonction de $\sqrt{3}\tg\alpha$:

$$\cos 6\alpha = \frac{(1 - \tg^2\alpha)((1 - \tg^2\alpha)^2 - 12\tg^2\alpha)}{(1 + \tg^2\alpha)^3},$$

expression que tout le monde connaît par cœur. Juste au cas où, vérifions :

$$\begin{aligned} &= (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)((\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)^2 - 12\sin^2\alpha\cos^2\alpha) \\ &= \cos 2\alpha((\cos 2\alpha)^2 - 3(\sin 2\alpha)^2) \\ &= \Re(\cos 2\alpha + i\sin 2\alpha)^3 = \cos 6\alpha \quad (\text{ouf!}) \end{aligned}$$

Faisons une pause pour signaler que la paramétrisation $r_1 = \cos \phi$, $r_2 = \cos(\phi - \frac{2\pi}{3})$, $r_3 = \cos(\phi + \frac{2\pi}{3})$ met en évidence que les racines de $4X^3 - 3X - u = 0$ sont les abscisses de points situés sur le cercle unité et formant les sommets d'un triangle équilatéral.² Et notre problème admet donc la reformulation suivante : « décrire tous les triangles équilatéraux inscrits au cercle unité et dont les sommets ont des abscisses rationnelles ».

Il y a (au moins) une symétrie évidente dans notre problème : c'est de remplacer u par $-u$ et les racines par leurs opposés ; ce qui, en les remettant dans l'ordre, correspond à $r_1(-u) = -r_3(u)$, $r_2(-u) = -r_2(u)$, $r_3(-u) = -r_1(u)$. Au niveau du paramètre s , vu comme fonction de u , c'est donc

$$s(-u) = \frac{r_3(-u) - r_2(-u)}{1 - r_1(-u)} = \frac{r_2 - r_1}{1 + r_3}$$

et en utilisant les formules pour r_1, r_2, r_3 en fonction de s , ceci donne

$$s(-u) = \frac{3 - 6s - s^2 + 6 - 2s^2}{6 + 2s^2 + 3 + 6s - s^2} = \frac{9 - 6s - 3s^2}{9 + 6s + s^2} = \frac{(3 - 3s)(3 + s)}{(3 + s)^2} = \frac{3 - 3s}{3 + s}$$

Remarquons à ce propos que $\sigma(s) := \frac{3-3s}{3+s}$ est bien une bijection décroissante de $]0, 1[$ avec lui-même ($\sigma(0^+) = 1$, $\sigma(1^-) = 0$) vérifiant³ $\sigma(\sigma(s)) = s$. On a donc :

Théorème 2. Les fonctions⁴ $r_1(s)$, $r_2(s)$, $r_3(s)$ et $u(s)$ du [Théorème 1](#) vérifient

$$r_1\left(\frac{3-3s}{3+s}\right) = -r_3(s), \quad r_2\left(\frac{3-3s}{3+s}\right) = -r_2(s), \quad r_3\left(\frac{3-3s}{3+s}\right) = -r_1(s), \quad u\left(\frac{3-3s}{3+s}\right) = -u(s)$$

Au niveau du paramètre $\alpha = \text{Arctg} \frac{s}{\sqrt{3}}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{6}$, on constate que

$$\text{tg}\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right) = \frac{\text{tg} \frac{\pi}{6} - \text{tg} \alpha}{1 + \text{tg} \frac{\pi}{6} \text{tg} \alpha} = \frac{1 - \sqrt{3} \text{tg} \alpha}{\sqrt{3} + \text{tg} \alpha} = (\sqrt{3})^{-1} \frac{1-s}{1 + \frac{1}{3}s} = (\sqrt{3})^{-1} \frac{3-3s}{3+s}$$

donc, comme on pouvait en fait s'y attendre, la symétrie correspond à $\alpha \mapsto \frac{\pi}{6} - \alpha$. Ce qui induit pour $\phi = 2\alpha - \pi$ la transformation $\phi \mapsto \frac{\pi}{3} - \phi \pmod{2\pi}$. C'est la symétrie orthogonale dans la droite $\mathbb{R} \exp(i \frac{\pi}{6})$, qui est l'une des symétries de l'hexagone des racines sixièmes de l'unité (de celles qui remplacent le triangle équilatéral $1, j, j^2$ par celui de sommets $-1, -j, -j^2$).

Plus exhaustivement, si l'on ne restreint plus s au seul intervalle $]0, 1[$, mais qu'on l'autorise à parcourir toute la droite réelle projective $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$, cela signifie

2. Ce cercle peut être caractérisé intrinséquement comme celui de centre le point d'inflexion du graphe du polynôme cubique étudié et de rayon la distance horizontale entre les extrema locaux du graphe.

3. À propos une homographie $g(t) = (at + b)/(ct + d)$ vérifie $\forall t \ g(g(t)) = t$ si et seulement si, soit elle est l'identité $g(t) = t$, soit elle est « de trace nulle », c'est-à-dire $a + d = 0$.

4. La notation fonctionnelle, certes très pratique, ne doit pas nous confiner à une vision tronquée, normalisée, contrôlée, inventée, simulée, de la réalité, qui telle un carcan liberticide aurait rendu impossible le travail de fondements fait en majorité par des phtisiques au XIX^e siècle. Donc nous nous autorisons à considérer au choix r_1 comme une fonction de u ou de s , par exemple. Un traitement complet nécessiterait de plus d'aller dans le complexe et d'introduire des surfaces de Riemann, mais cela dépasse le cadre de cet article.

autoriser pour α tout l'intervalle $[0, \pi]$, et pour $\phi = 2\alpha - \pi$, tout l'intervalle de périodicité $[0, 2\pi]$, alors chaque valeur de $u = \cos 3\phi$ autre que ± 1 sera atteinte exactement 6 fois, et les paramétrisations du [Théorème 1](#) donneront les 6 permutations possibles de l'ordre des 3 racines.

Ceci est illustré par une animation créée par J. Gilg, voir [\[2\]](#) (le polynôme y est $x^3 - \frac{3}{4}x$, plutôt que le $4x^3 - 3$ des figures [2](#) et [3](#) du présent texte).

Chacune des transformations $\alpha \mapsto \alpha + k\frac{\pi}{6}$, $k = 0, 1, \dots, 5$ est homographique au niveau de s :

$$s(\alpha + \frac{\pi}{6}) = \sqrt{3} \operatorname{tg}(\alpha + \frac{\pi}{6}) = \sqrt{3} \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \frac{\pi}{6}}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \frac{\pi}{6}} = \frac{s+1}{1-\frac{1}{3}s} = \frac{3+3s}{3-s} =: \lambda(s)$$

L'homographie $\lambda(s)$ est donc nécessairement d'ordre fini, précisément égal à 6, puisque la fonction tg est de période π . Calculons $\sigma\lambda$. C'est une homographie de matrice representative

$$\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix},$$

donc $\sigma\lambda(s) = -s$ et $\sigma\lambda\sigma = \operatorname{Id}$, $\sigma\lambda\sigma = \lambda^{-1}$, finalement $\boxed{\sigma\lambda\sigma^{-1} = \lambda^{-1}}$, $\boxed{\lambda^6 = \operatorname{Id}}$, $\boxed{\sigma^2 = \operatorname{Id}}$ ce qui constitue un système de générateurs et relations pour le groupe diédral D_{12} , qui est ici incarné en un groupe d'homographies, définies sur \mathbb{Q} .

L'élément central ρ de ce groupe est λ^3 , qui correspond à $\alpha \mapsto \alpha + \frac{\pi}{2}$, donc à $\phi \mapsto \phi + \pi$, ce qui induit les transformations $r_1 \mapsto \cos(\phi + \pi) = -r_1$, $r_2 \mapsto \cos(\phi - \frac{2\pi}{3} + \pi) = -r_2$, $r_3 \mapsto -r_3$ et $u \mapsto -u$. Cela ressemble à notre symétrie σ , mais attention que λ^3 ne maintient pas l'ordre des racines... Au niveau de $s = \sqrt{3} \operatorname{tg} \alpha$ cela induit $s \mapsto \sqrt{3} \operatorname{tg}(\alpha + \frac{\pi}{2}) = -\sqrt{3}(\operatorname{tg} \alpha)^{-1} = \frac{-3}{s}$.

Vous pourrez donc vérifier que $r_1(-\frac{3}{s}) = -r_1(s)$, $r_2(-\frac{3}{s}) = -r_2(s)$, $r_3(-\frac{3}{s}) = -r_3(s)$. Et que $s \mapsto \rho(s) := \frac{-3}{s}$ commute avec λ et avec σ . Des douze homographies, seulement deux, à savoir l'identité et σ , stabilisent $]0, 1[$.

Les s -intervalles permutés cycliquement par λ sont $]0, 1[$, $]1, 3[$, $]3, \infty[$, $]\infty, -3[$, $]-3, -1[$, $]-1, 0[$. On a $\sigma([0, 1]) =]0, 1[$, $\sigma([1, 3]) =]-1, 0[$, $\sigma([3, \infty]) =]-3, -1[$, puis un autre intervalle stable $\sigma(]\infty, -3[) =]\infty, -3[$, et, en lien avec $\sigma^2 = \operatorname{Id} : \sigma(]-3, -1[) =]3, \infty[$, $\sigma(]-1, 0[) =]1, 3[$.

Au niveau de $u = \cos 3\phi = -\cos(6\alpha)$, les transformations engendrées par λ sont une translation par un multiple de π , donc font soit $u \mapsto u$, soit $u \mapsto -u$. Celles faisant $u \mapsto u$ correspondent à une translation de ϕ par un multiple de $\frac{2\pi}{3}$ et donc induisent une permutation cyclique des trois racines de $4x^3 - 3x = u$. Pour induire l'une des trois transpositions de deux racines il faut composer une puissance impaire de λ (qui induit $u \mapsto -u$) avec σ (qui fera $-u \mapsto u$).

Et $\{\operatorname{Id}, \lambda^2, \lambda^4, \sigma\lambda, \sigma\lambda^3, \sigma\lambda^5\}$ est bien un groupe isomorphe à $D_6 \sim S_3$, puisque qu'avec $\tau = \sigma\lambda$, on a $\tau^2 = \operatorname{Id}$ et $\tau\lambda^2 = \sigma\lambda^3$ donc comme λ^3 est dans le centre, aussi $(\tau\lambda^2)^2 = \operatorname{Id}$. D'ailleurs au niveau de $z = e^{i\phi}$, λ^2 est la multiplication par $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$, et $\sigma\lambda$ (qui fait $s \mapsto -s$, donc $\alpha \mapsto -\alpha \bmod \pi$ donc $\phi \mapsto -\phi \bmod 2\pi$) est la symétrie dans l'axe réel $z \mapsto \bar{z}$, donc on trouve le groupe diédral des symétries

du triangle équilatéral de sommets $1, j, j^2$. Et D_{12} est alors celui des symétries de l'hexagone.⁵

On peut montrer que comme groupe d'homographies, ce D_6 est celui des homographies laissant stable $\{-1, 1, \infty\}$, et que son autre unique orbite de cardinalité 3 est $\{-3, 0, 3\}$. Et que l'unique homographie commutant avec D_6 est $s \mapsto -3/s$. Elle échange les deux orbites de cardinalité trois de D_6 .

Références

- [1] J.-F. Burnol et J. Gilg, *Nice cubic polynomials, symmetry and arithmetic of the Lagrange resolvent*, Feb. 22, 2021. Disponible sur <http://pstricks.blogspot.com/2021/02/polynomes-cubiques-plaisants.html>
- [2] J.-F. Burnol et J. Gilg, *Triangle équilatéral et danse des racines d'une équation cubique (animation)*. Disponible sur <http://pstricks.blogspot.com/2021/02/polynomes-cubiques-plaisants.html>

Table des figures

1	Tableau de variation de $4x^3 - 3x$	2
2	Quelques solutions à notre problème : trouver tous les triangles équilatéraux inscrits au cercle unité et d'abscisses rationnelles. . .	7
3	Les abscisses opposées de celles de la Figure 2. Les s de la Figure 2 sont ici remplacés par $\frac{3-3s}{3+s}$	8

5. La situation ici semble différente de celle de [1] où un groupe D_{12} d'homographies induit par des transformations du plan se voyait plutôt comme le quotient de D_{24} par son centre ; mais ceci s'explique par le fait que l'on travaille ici avec $z = e^{i\phi}$ et non pas avec $z' = e^{i\alpha}$, $z = -(z')^2$. Au niveau de z' il faudrait considérer le dodécagone, image inverse de l'hexagone du plan des z .

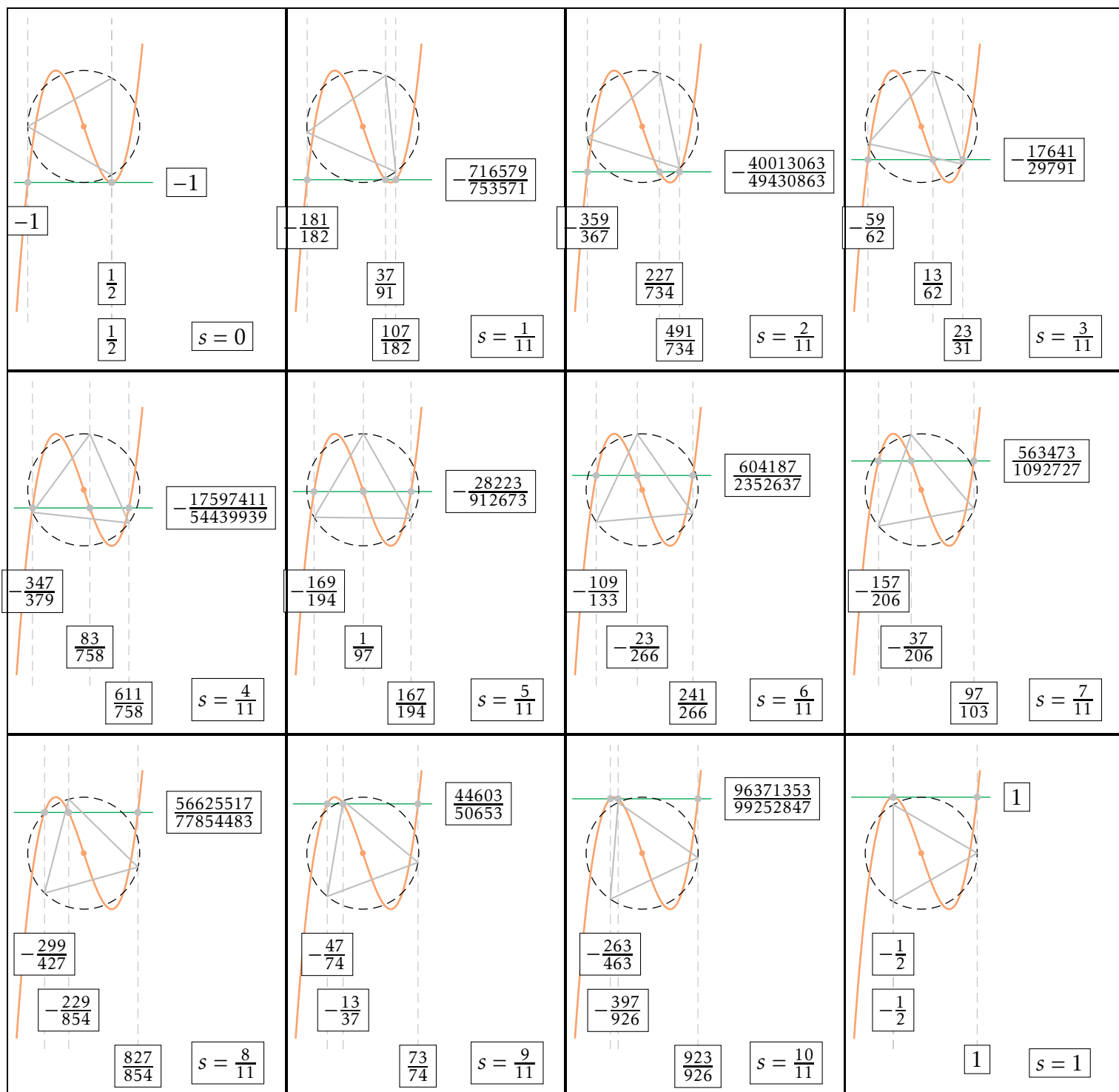


FIGURE 2 – Quelques solutions à notre problème : trouver tous les triangles équilatéraux inscrits au cercle unité et d'abscisses rationnelles.

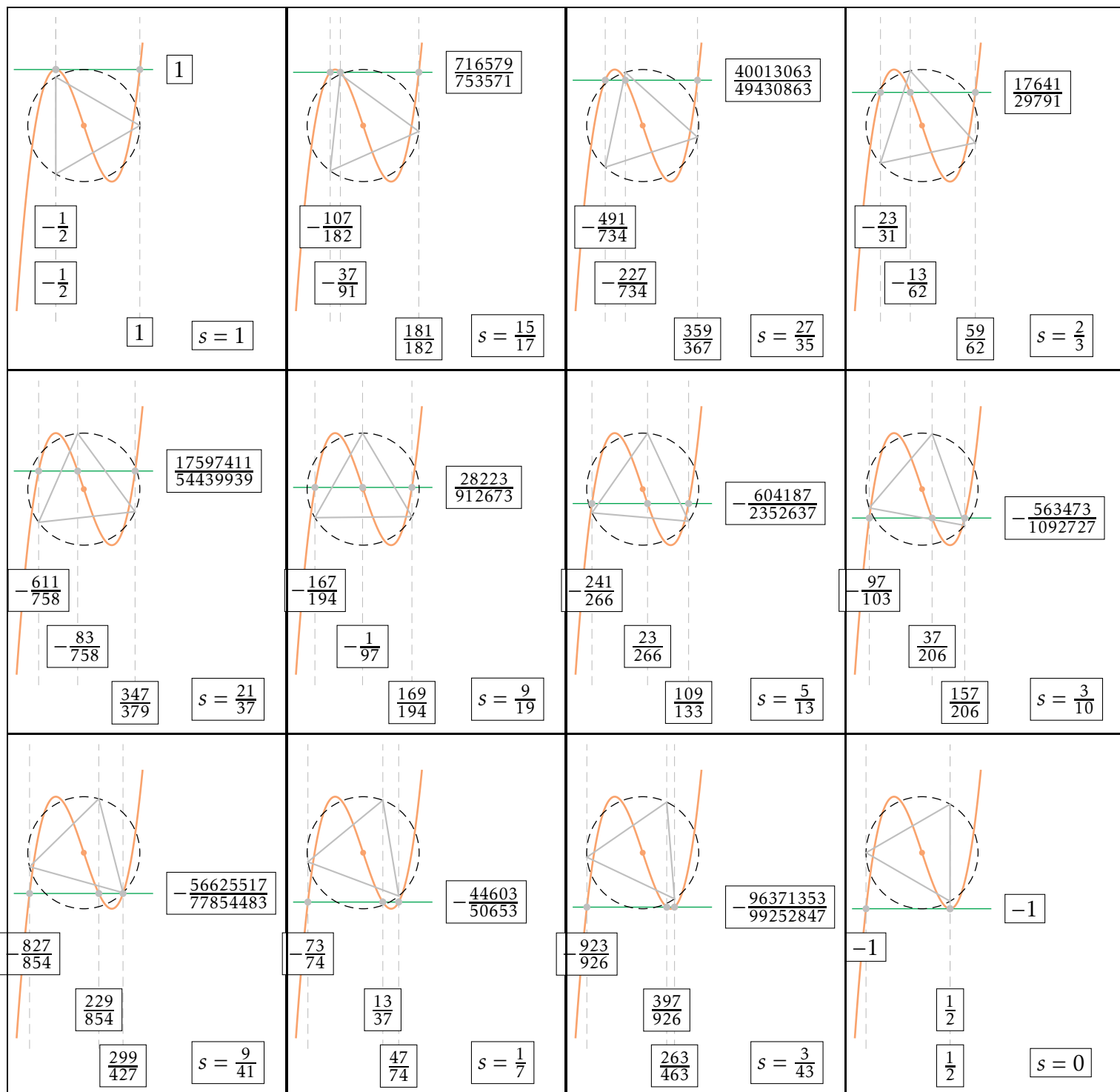


FIGURE 3 – Les abscisses opposées de celles de la Figure 2. Les s de la Figure 2 sont ici remplacés par $\frac{3-3s}{3+s}$.