Oscillations de l'aréomètre

manuel.luque27@gmail.com

28/07/2020

1 Étude simplifiée du problème

Ce document est la suite de l'étude et du dessin d'un aréomètre[1]. L'origine est fixée au bas de la tige à l'équilibre, déterminons d'abord la condition d'immobilité puis l'équation du mouvement On pose ρ la masse volumique du liquide, M la masse de l'appareil, S la section de la tige et V le volume de ma carène et de l'olive et h_0 la hauteur de tige immergée.

$$Mg = \rho g(V + Sh_0) \quad \text{on en déduit } h_0 = \frac{M - \rho V}{\rho S}$$

On déplace l'aréomètre vers le haut ou le bas d'un ou deux centimètres et on le laisse osciller librement, on tient comte du frottement du liquide. Si la hauteur de la tige immergée à un instant est h, notons par $z = h_0 - h$ le déplacement vertical de l'appareil.

$$M\ddot{z} = \rho g\big(V + S(h_0 - z)\big) - Mg - \alpha\dot{z}$$

En tenant de la condition d'équilibre, il reste :

$$M\ddot{z} = -\alpha\dot{z} - \rho g S z \Longleftrightarrow \ddot{z} + \frac{\alpha}{M}\dot{z} + \frac{\rho g S}{M} z = 0$$

On pose $\omega_0^2 = \dfrac{\rho g S}{M}$ et $\tau_e = \dfrac{M}{\alpha}$.
L'amortissement étant faible, l'équation du mouvement est de la forme :

$$z = C\exp\left(-\frac{t}{2\tau_e}\right)\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

Les constantes C et φ_0 sont déterminées par les conditions initiales.

$$\dot{z} = C\exp\left(-\frac{t}{2\tau_e}\right)\left[-\omega_0\sin(\omega_0 t + \varphi_0) - \frac{t}{2\tau_e}\cos(\omega_0 t + \varphi_0)\right]$$

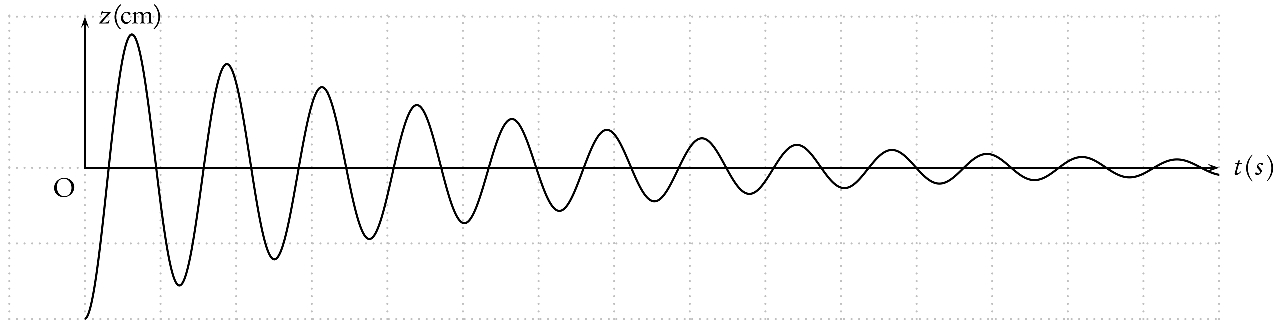
Supposons que à $t = 0$: $\dot{z} = 0$ et $z_0 = -2 \cdot 10^{-2}$.

$$0 = -\omega_0\sin\varphi_0 - \frac{1}{2\tau_e}\cos\varphi_0 \Longrightarrow \tan\varphi_0 = -\frac{1}{2\tau_0\omega_0} \text{ ; et } C = \frac{z_0}{\cos\varphi_0}$$

Déterminons un ordre de grandeur des constantes.

D'abord sur $\alpha = k\eta$. $\eta = 10$—3 Si pour l'eau. $k = 6\pi R$ pour une boule, prenons pour rayon celui de la carène (1 cm), $k \simeq 0.2$ SI, $\alpha \simeq 2 \cdot 10^{-4}$, exagérons et prenons $\alpha = 10^{-2}$. On utilise les dimensions de l'aréomètre de l'exemple précédent(1) : $M = 50$ g et $S = 1.34\,\mathrm{cm}^2$.

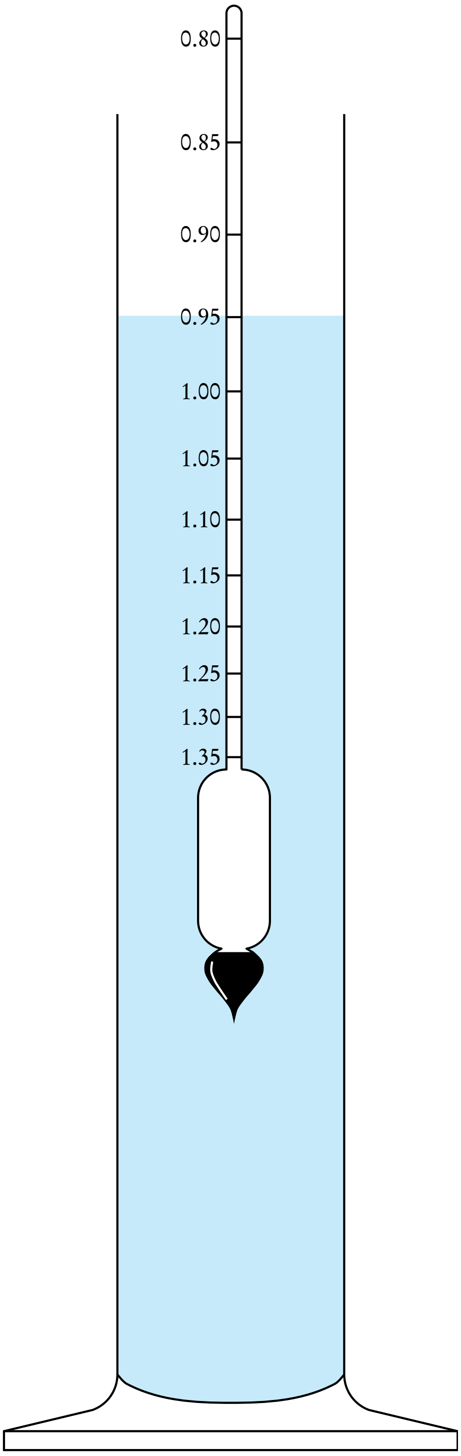
$\omega_0^2 = \dfrac{10^3 \times 9.8 \times 1.34 \cdot 10^{-4}}{50 \cdot 10^{-3}} \simeq 25$. La pseudo-période vaut $T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0} \simeq 1.25$ s et $\tau_e \simeq 5$ s.

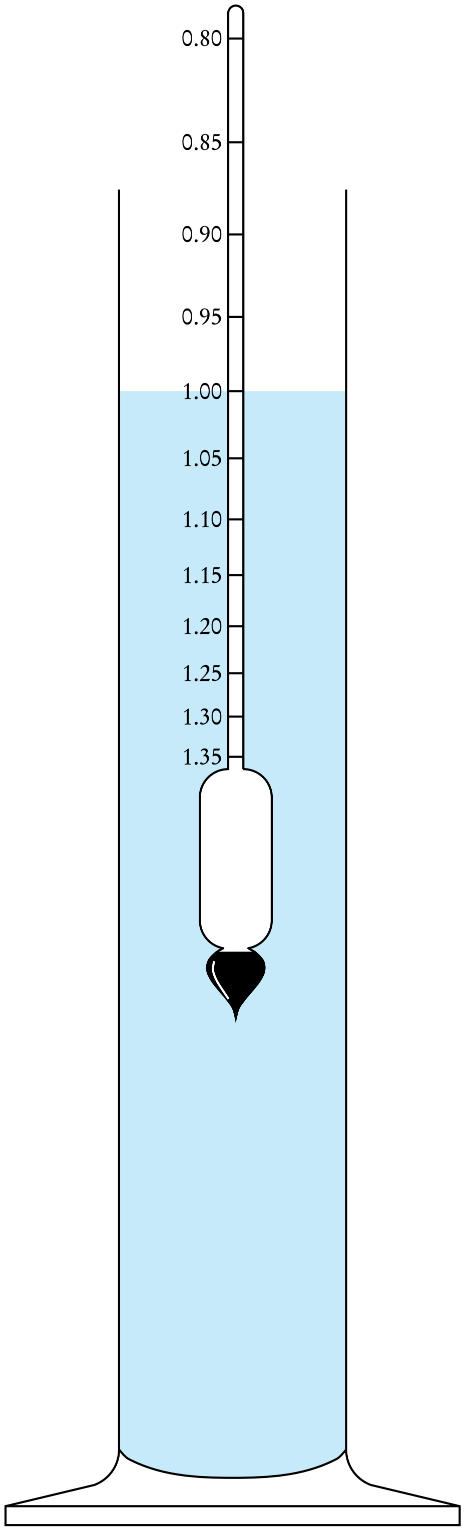


[1] http://pstricks.blogspot.com/2020/07/areometrehydrometre-densimetre-avec.html

2 Oscillations de l'aréomètre

La figure de droite représente l'appareil immobile. L'aréomètre est plongé dans l'eau. Initialement l'appareil est déplacé vers le bas de 2 cm avant d'être lâché sans vitesse initiale.
Par à rapport à la commande précédente, celle-ci nécessite 3 paramètres : `\psHydrometer{d}{z}{couleur}`. Le premier paramètre est la densité du liquide, le second la position du densimètre par rapport à la position d'équilibre et le troisième la couleur du liquide. On retrouvera la première commande, l'immobilité, en plaçant le deuxième paramètre à 0 : `\psHydrometer{1}{0}{cyan!20}`


0.80
0.85
0.90
0.95
1.00
1.05
1.10
1.15
1.20
1.25
1.30
1.35


0.80
0.85
0.90
0.95
1.00
1.05
1.10
1.15
1.20
1.25
1.30
1.35