Plus vite que la pesanteur

manuel.luque27@gmail.com

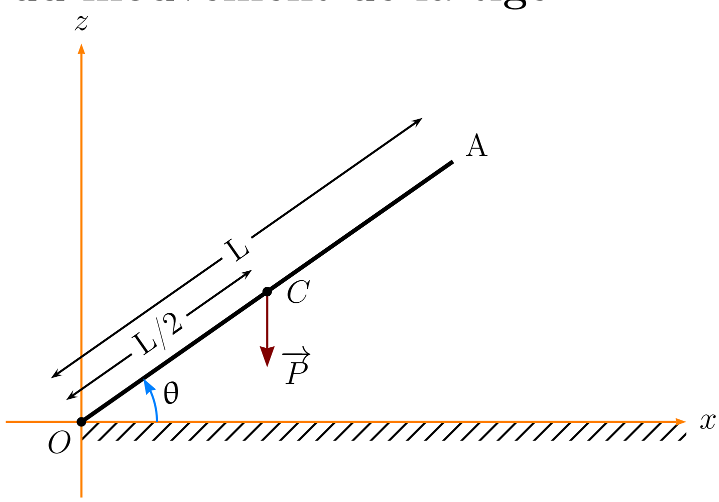
3 février 2021

La revue Pour la Science n°434 - Décembre 2013, contient un article intitulé "*Tomber plus vite qu'en chute libre*" dans lequel les auteurs Jean-Michel Courty et Édouard Kierlik décrivent 3 expériences illustrant le thème : chute verticale d'un ressort à boudin, chute simultanée d'une planche en rotation par une extrémité autour d'un axe horizontal et d'une bille en acier, chute d'une échelle à montants. C'est la deuxième qui est illustrée dans cette page.

Parmi les auteurs ayant réalisé et publié cette expérience, une des plus illustrée est celle réalisée par Michael Vollmer and Klaus-Peter Möllmann, l'article est intitulé "Faster than g, revisited with high-speed imaging" et a été publié dans "*European Journal of Physics*" :

L'article de Aljosa Erman est tout aussi très intéressant : Faster than gravity.

1 Étude du mouvement de la tige



La tige OA tourne autour de O, sa masse est m et son moment d'inertie par rapport à O est $J = \frac{1}{3}mL^2$. On l'écarte d'un angle θ_0 de l'horizontale et on la lâche sans vitesse initiale. On prend $g = 9,8$ m.s^{-2}.

On applique le théorème du moment cinétique en O, avec $OC = L/2$ et on obtient :

$$\ddot{\theta} = -\frac{3}{2}\frac{g}{L}\cos\theta$$

Le problème est de trouver la durée de la chute jusqu'au plan horizontal $\theta = 0$. Il n'y a pas de frottements, écrivons la conservation de l'énergie mécanique.

$$mg\frac{L}{2}\sin\theta + \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 = mg\frac{L}{2}\sin\theta_0$$

On trouve :

$$\dot{\theta}^2 = \frac{3g}{L}(\sin\theta_0 - \sin\theta) \Longrightarrow \dot{\theta} = -\sqrt{\frac{3g}{L}}\sqrt{\sin\theta_0 - \sin\theta}$$

$$\mathrm{d}t = -\sqrt{\frac{L}{3g}}\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\sin\theta_0 - \sin\theta}}$$

et la durée de la chute :

$$T = \sqrt{\frac{L}{3g}}\int_0^{\theta_0}\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\sin\theta_0 - \sin\theta}} \tag{1}$$

On opère un premier changement de variable, en prenant le complément de θ, $\theta = \frac{\pi}{2} - \varphi$, d'où $\mathrm{d}\theta = -\mathrm{d}\varphi$. Dans un premier temps on s'intéresse à $\sin\theta_0 - \sin\theta$ qui devient : $\cos\varphi_0 - \cos\varphi$. On se rappelle que $\cos\varphi = 2\cos^2\dfrac{\varphi}{2} - 1$ et on a :

$$\sin\theta_0 - \sin\theta = 2(\cos^2\frac{\varphi_0}{2} - \cos^2\frac{\varphi}{2})$$

$$= 2\cos^2\frac{\varphi_0}{2}\left(1 - \frac{\cos^2\dfrac{\varphi}{2}}{\cos^2\dfrac{\varphi_0}{2}}\right)$$

On pose $k = \cos\dfrac{\varphi_0}{2}$ et $\sin\alpha = \dfrac{\cos\dfrac{\varphi}{2}}{k}$. L'expression précédente devient :

$$\sin\theta_0 - \sin\theta = 2k^2(1 - \sin^2\alpha)$$

On s'occupe maintenant de $\mathrm{d}\varphi$, en différentiant $k\sin\alpha = \cos\dfrac{\varphi}{2}$.

$$k\mathrm{d}\alpha\cos\alpha = -\frac{\mathrm{d}\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2}$$

$$\mathrm{d}\varphi = -\frac{2k\mathrm{d}\alpha\cos\alpha}{\sin\dfrac{\varphi}{2}} = -\frac{2k\mathrm{d}\alpha\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sqrt{1-\cos^2\dfrac{\varphi}{2}}} = -\frac{2k\mathrm{d}\alpha\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}}$$

Dans l'expression de la durée (1), en remplaçant $\mathrm{d}\theta$ par l'expression de $-\mathrm{d}\varphi$ on obtient :

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\sin\theta_0-\sin\theta}} = \frac{\dfrac{2k\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}}\mathrm{d}\alpha}{\sqrt{2}k\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$$

Après simplification :

$$\frac{2\mathrm{d}\alpha}{\sqrt{2}\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}}$$

Il reste à déterminer les nouvelles bornes de l'intégrale.

Pour $\theta = 0$, on a $\varphi = \frac{\pi}{2}$ et $\sin\alpha_1 = \dfrac{\cos\frac{\pi}{4}}{k} \Longrightarrow \alpha_1 = \arcsin\frac{1}{k\sqrt{2}}$.

Pour θ_0, on a $\sin\alpha_0 = 1 \Longrightarrow \alpha_0 = \frac{\pi}{2}$

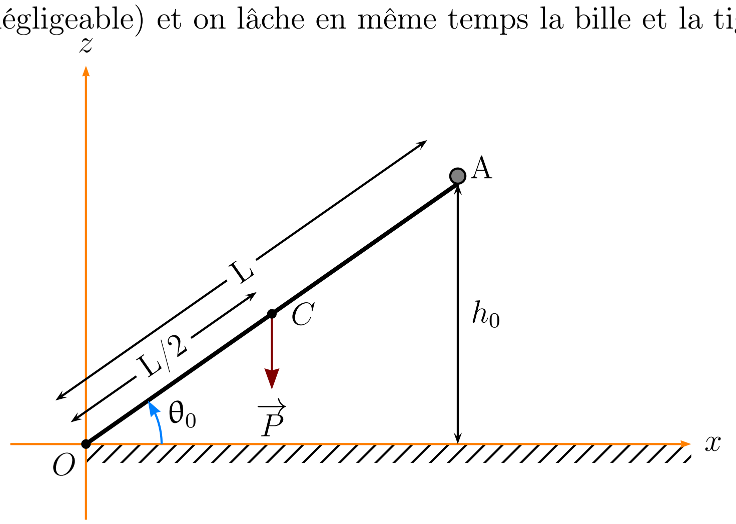
La durée de la chute de la tige peut se calculer à l'aide de l'intégrale elliptique :

$$T = \sqrt{\frac{2L}{3g}}\int_{\alpha_1}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}\alpha}{\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}} \tag{2}$$

On utilisera l'une ou l'autre des expressions de la durée (1) ou (2) pour la calculer.

2 Plus rapide que la chute libre

On place une bille à l'extrémité de la tige (on considère pour les calculs que son rayon est négligeable) et on lâche en même temps la bille et la tige.



La durée de la chute de la bille vaut :

$$T_0 = \sqrt{\frac{2L\sin\theta_0}{g}}$$

On veut calculer l'accélération verticale de l'extrémité de la tige pour la comparer à l'accélération de la pesanteur : g. Soit A cette extrémité.

$$\overrightarrow{OA} = \left| \begin{array}{l} L\cos\theta \\ \\ L\sin\theta \end{array} \right. \qquad \overrightarrow{v} = L \left| \begin{array}{c} -\dot{\theta}\sin\theta \\ \\ \dot{\theta}\cos\theta \end{array} \right. \qquad \overrightarrow{a} = L \left| \begin{array}{c} -\ddot{\theta}\sin\theta - \dot{\theta}^2\cos\theta \\ \\ \ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta \end{array} \right.$$

En remplaçant $\ddot{\theta}$ et $\dot{\theta}^2$ par les expressions déjà trouvées, on a :

$$a_z = L\left[-\frac{3}{2}\frac{g}{L}\cos^2\theta - \frac{3g}{L}(\sin\theta_0 - \sin\theta)\sin\theta\right]$$

Soit en valeur absolue, pour comparer avec g.

$$|a_z| = \left[\frac{3g}{2}\cos^2\theta + 3g(\sin\theta_0 - \sin\theta)\sin\theta\right]$$

À l'instant initial $\theta = \theta_0$. L'accélération verticale de l'extrémité de la tige qui vaut alors :

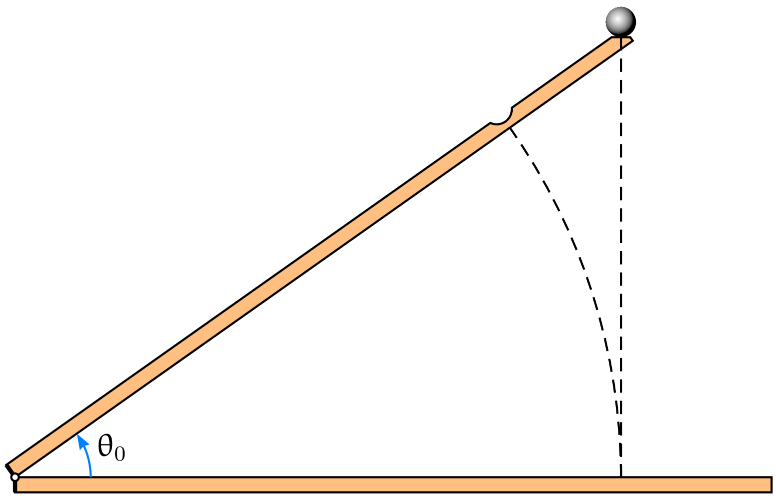
$$|a_z| = \frac{3g}{2}\cos^2\theta$$

doit être supérieure à celle de la pesanteur si l'on veut la bille ne touche plus la tige, la première condition est :

$$\frac{3g}{2}\cos^2\theta_0 > g \Longrightarrow \cos\theta_0 > \sqrt{\frac{2}{3}}$$

L'angle initial doit vérifier la condition $\theta_0 < 35.26^o$. Par la suite, $\theta \longrightarrow 0$ et $|a_z|$ augmente tout au long de la chute, puisque le premier et le second terme augmentent.

Pour rendre l'expérience plus spectaculaire, les différents réalisateurs de l'expérience fixent un petit récipient sur la tige à l'endroit précis où la bille tombera afin de la recueillir.



θ_0