1 Le Botafumeiro – un oscillateur paramétrique

1.1 Introduction

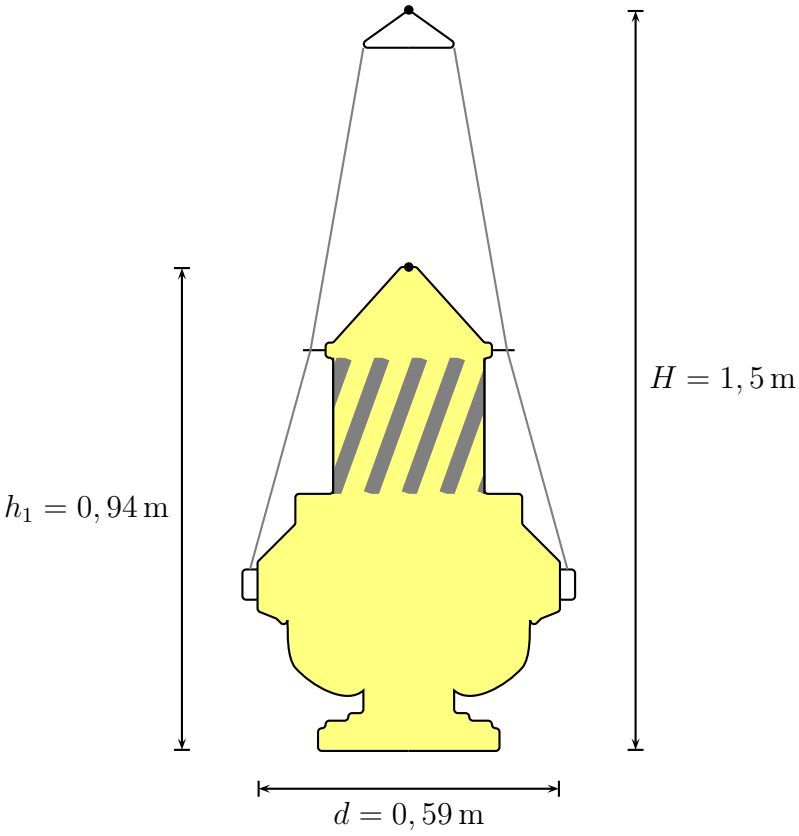
« Suspendu par une corde attachée au haut de la croisée de la cathédrale, l'encensoir gigantesque est dévié, d'une poussée, de sa position de repos verticale. Pendant qu'il se balance, huit hommes tirent sur une corde qui soulève l'encensoir lorsque celui-ci passe par la verticale et relâchent la corde quand l'encensoir est au plus haut. Les tireurs, sous les ordres d'un conducteur, amplifient ainsi les oscillations de l'encensoir, jusqu'à ce que celui-ci monte à une hauteur de 21 mètres, décrive un arc de 65 mètre de longueur, et passe en vrombissant à la vitesse de 68 kilomètres à l'heure en un point situé à ras du sol.[1] »

« ... le dispositif actuel a, en son centre, deux tambours de châtaignier, de 58 centimètres et 29 centimètres de diamètre, dont l'axe commun repose sur la carcasse métallique. ... L'encensoir actuel est en laiton argenté. »

« La corde dont une extrémité est dans les mains des tireurs s'enroule d'abord autour du tambour de petit diamètre, puis autour du tambour de grand diamètre, et redescend vers le sol ; la seconde extrémité est nouée à l'encensoir. Quand l'encensoir et la corde passent par la position verticale, les hommes tirentsur l'autre extrémité de la corde qui fait tourner le petit tambour de plus d'un tour et demi, lequel entraîne le grand tambour et la même corde soulève ainsi l'encensoir d'environ trois mètres. Ce dispositif à double tambour amplifie les déplacements. Les tireurs relâchent la même longueur de corde lorsque l'encensoir atteint le point d'amplitude maximale. Après la poussée initiale, l'amplitude angulaire est d'environ 13 degrés. En 80 secondes et 17 demi-périodes d'oscillation de l'encensoir, l'amplitude maximale de 82 degrés est atteinte, l'encensoir atteignant un point situé à un demi-mètre sous la voûte. »

[1] Cité d'un article "Pour la science" numéro 155, de Juan Sanmartin Losada – tous les citations sont de cette article.

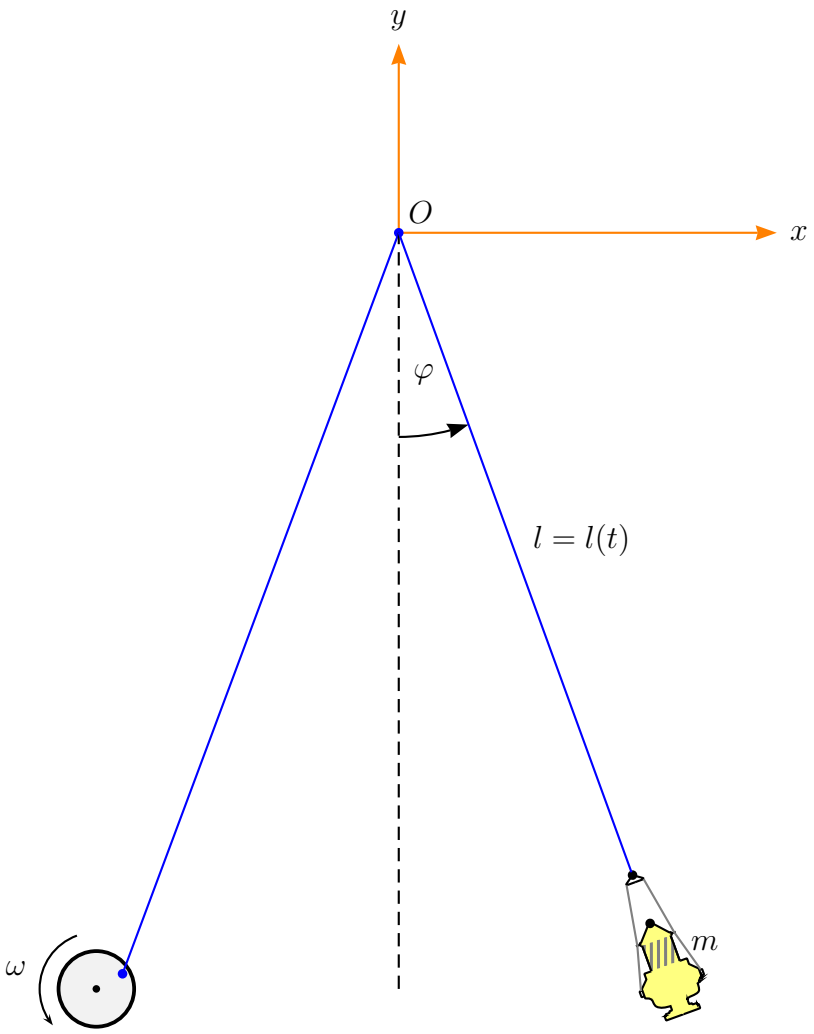
1.2 Les dimensions de l'encensoir



L'encensoir pèse 53 kg et pend à l'extrémité d'une corde de 20 mètres.

1.3 Réalisation expérimentelle

Une illustration expérimentale très simple est celle d'un pendule simple de longueur variable (donné par un tambour que tourne avec une vitesse angulaire ω constante).



1.4 La physique du pendule

1.4.1 Les équations différentielles

Les coordonnées de la masse m

$$x = l \sin \varphi$$
$$y = -l \cos \varphi$$

L'oscillation ω de la suspension ($a < l_0$):

$$l = l_0 + a \sin \omega t$$

Les derivées par rapport au temps :

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= \dot{l}\sin\varphi + l\dot{\varphi}\cos\varphi \\
\dot{y} &= -\dot{l}\cos\varphi + l\dot{\varphi}\sin\varphi \\
\dot{l} &= a\omega\cos\omega t
\end{aligned}$$

L'énergie cinétique

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2}m(\dot{l}^2 + l^2\dot{\varphi}^2) \\
&= \frac{1}{2}ma^2\omega^2\cos^2\omega t + \frac{1}{2}m(l_0 + a\sin\omega t)^2\dot{\varphi}^2
\end{aligned}$$

L'énergie potentielle de pesanteur :

$$\begin{aligned}
U &= mgy = -mgl\cos\varphi \\
&= -mg(l_0 + a\sin\omega t)\cos\varphi
\end{aligned}$$

La fonction Lagrange :

$$\begin{aligned}
L &= T - U \\
&= \frac{1}{2}ma^2\omega^2\cos^2\omega t + \frac{1}{2}m(l_0 + a\sin\omega t)^2\dot{\varphi}^2 + mg(l_0 + a\sin\omega t)\cos\varphi
\end{aligned}$$

Pour φ, $\dot{\varphi}$, on reçoit

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial\varphi} &= -mg(l_0 + a\sin\omega t)\sin\varphi \\
\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} &= m(l_0 + a\sin\omega t)^2\dot{\varphi} \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} &= 2m\omega\dot{\varphi}(l_0 + a\sin\omega t)\cos\omega t + m(l_0 + a\sin\omega t)^2\ddot{\varphi}
\end{aligned}$$

Avec du frottement $F = \alpha v$ on a la fonction de dissipation

$$D = \int_0^v h(v)\,\mathrm{d}v = \int_0^v \alpha v\,\mathrm{d}v = \frac{1}{2}\alpha v^2 = \frac{1}{2}\alpha(a^2\omega^2\cos^2\omega t + (l_0 + a\sin\omega t)^2\dot{\varphi}^2)$$

Le formalisme Lagrangien donne :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial\varphi} + \frac{\partial D}{\partial\dot{\varphi}} = 0$$

L'équation différentielle avec du frottement :

$$\ddot{\varphi} + \frac{\alpha}{m}\dot{\varphi} + \frac{2\omega\dot{\varphi}\cos\omega t + g\sin\varphi}{l_0 + a\sin\omega t} = 0$$

L'équation différentielle sans frottement ($\alpha = 0$) :

$$\ddot{\varphi} + \frac{2\omega\dot{\varphi}\cos\omega t + g\sin\varphi}{l_0 + a\sin\omega t} = 0$$

1.4.2 La tension du fil

La tension du fil est maximale quand l'encensoir est au point le plus bas – là il a aussi une vitesse maximale $v_{\max}$. La vitesse v à l'amplitude maximale est nulle.

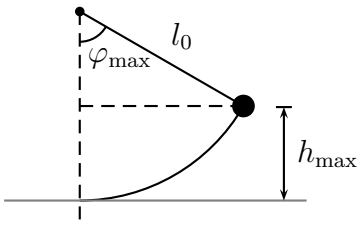
La tension F_T du fil compose de la force pesant normale $F_n = mg\cos\varphi$ et la force centrifuge $F_c = m\frac{v^2}{l_0}$

$$F_T = m\left(g\cos\varphi + \frac{v^2}{l_0}\right)$$

En tout bas ($\varphi = 0$) en reçoit

$$F_{T,\max} = m\left(g + \frac{v_{\max}^2}{l_0}\right)$$

La vitesse v dépend de l'amplitude maximale $\varphi_{\max}$.



Le théoreme de conservation de l'énergie donne :

$$mgh_{\max} = \frac{1}{2}mv_{\max}^2$$

dont $h_{\max} = l_0(1 - \cos\varphi_{\max})$

$$v_{\max} = \sqrt{2gl_0(1 - \cos\varphi_{\max})}$$

La tension

$$F_{T,\max} = mg(3 - 2\cos\varphi_{\max})$$

Quand l'angle maximale est $\varphi_{\max} = 82°$ et $l_0 = 21\,\mathrm{m}$ et $m = 54\,\mathrm{kg}$ ça donne :

$$v_{\max} = 18,8\,\mathrm{m\,s^{-1}} = 67,8\,\mathrm{km\,h^{-1}}$$

et la tension

$$F_{T,\max} = 1442\,\mathrm{N}$$

1.4.3 Le travail pour les tireurs pour enlever l'encensoir

Les tireurs enlevent l'encensoir au point plus bas et ils doivent travailler contre la tension du fil. Il y en a huit tireurs et ils enlevent l'encensoir à peu près à $\Delta h = 2\,\mathrm{m}$.

$$W = F_{T,\max} \cdot \Delta h = 2884\,\mathrm{J}$$

Chaque tireur alors tire avec une énergie de $\approx 360\,\mathrm{J}$ pour enlever à l'amplitude maximale.

Regardons deux points de retour du trajectoire – nommons-les $\varphi_{\max,n}$ et $\varphi_{\max,n+1}$ dans une demi-période, ceux-ci ont une hauteur du bas $h_{\max,n}$ et $h_{\max,n+1}$, ici les vitesses sont nulles.

Entre le deux points de retour les tireur enleve l'encensoir sur une trajectoire d'une énergie plus grand. La bilance de l'énergie donne :

$$\begin{aligned} mgh_{\max,n} + E_{n\to n+1} &= mgh_{\max,n+1} \\ E_{n\to n+1} &= mgh_{\max,n+1} - mgh_{\max,n} \\ &= mgl_0(\cos\varphi_{\max,n} - \cos\varphi_{\max,n+1}) \end{aligned}$$

$E_{n\to n+1}$, c'est l'énergie que les tireurs doivent supporter à chaque demi-période.

Alors il nous faut déterminer tous les points de retour $\varphi_{\max,n}$ et les listent dans un tableau. Puis on pourrait calculer l'énergie nécessaire pour les tireurs ...– la plus grande amplitude devrait donner : $W = F_{T,\max} \cdot \Delta h = 2884\,\mathrm{J}$

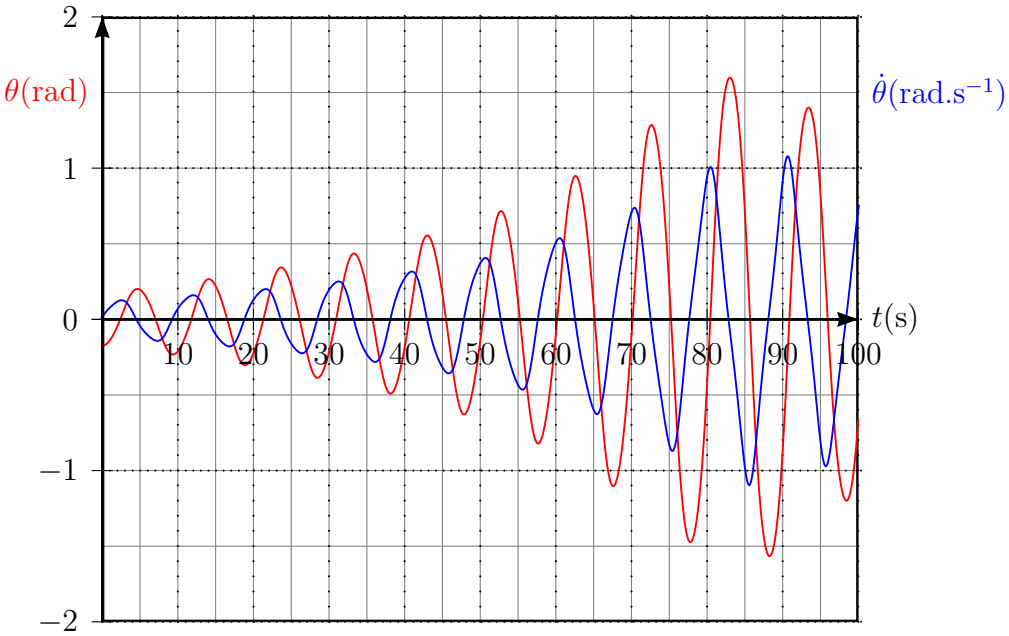
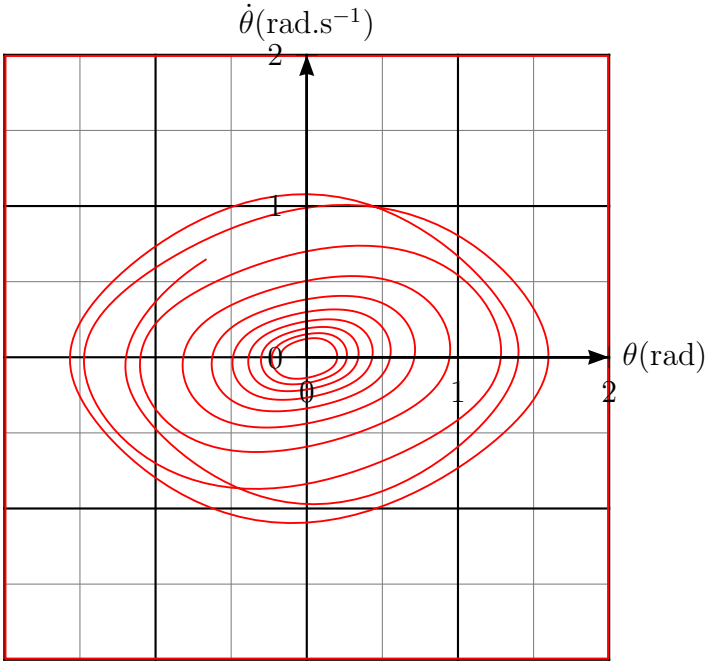
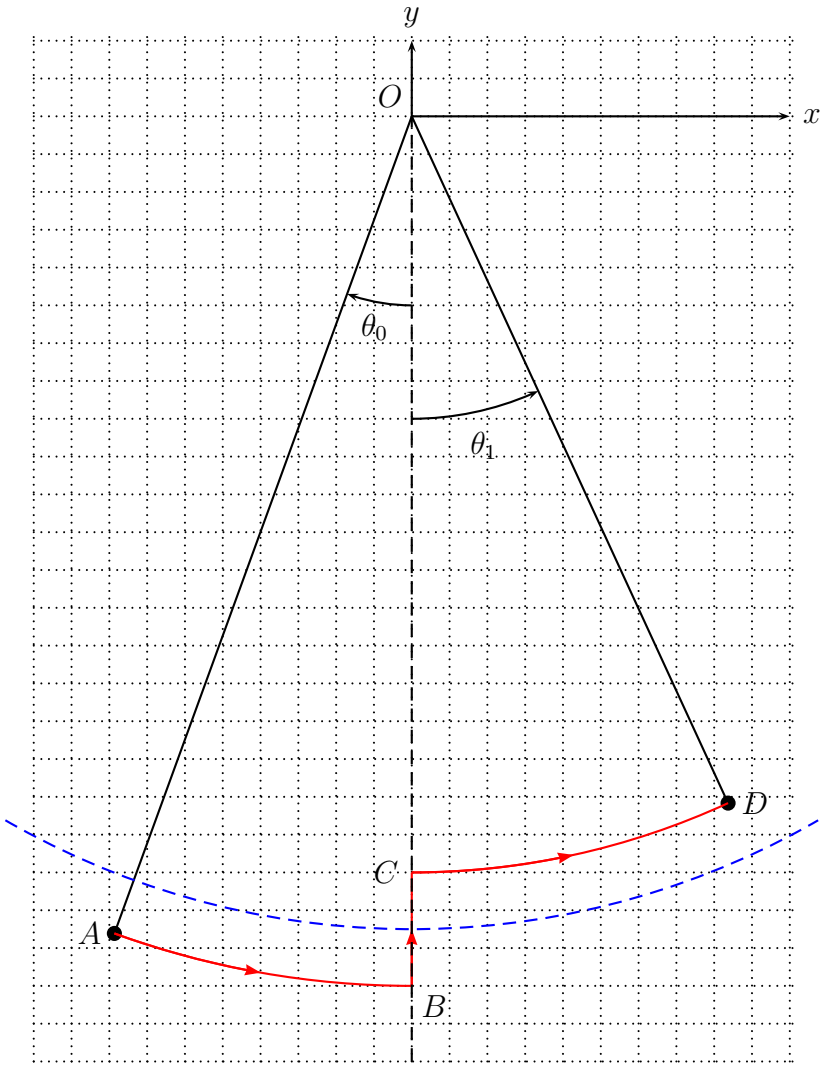


Diagramme des phases :


$\dot{\theta}$(rad.s^{-1})
2
1
0
0
1
2
θ(rad)



Le pendule est abandonné sans vitesse initiale au point A : $v_A = 0$ alors $OA = l_0 + a$. Calculons, l'amplitude après une demi-période : trajet $ABCD$.

$$\mathcal{E}_m(A) = -mg(l_0 + a)\cos\theta_0$$

En B :

$$\mathcal{E}_m(B) = \frac{1}{2}mv_B^2 - mg(l_0 + a)$$

Conservation de l'énergie :

$$\frac{1}{2}mv_B^2 = mg(l_0 + a)(1 - \cos\theta_0)$$

Instantanément, le pendule est remonté de B à C. Les moments de $\overrightarrow{P}$ et $\overrightarrow{T}$ par rapport à O étant nuls, il y a conservation du moment cinétique :

$$m(l_0 + a)v_B = m(l_0 - a)v_C \Longleftrightarrow v_C = \frac{l_0 + a}{l_0 - a}v_B$$

On en déduit l'énergie mécanique du pendule en C :

$$\mathcal{E}_m(C) = \frac{1}{2}mv_C^2 - mg(l_0 - a)$$

En remplaçant v_C par son expression, on en déduit :

$$\mathcal{E}_m(C) = mg\frac{(l_0 + a)^3}{(l_0 - a)^2}(1 - \cos\theta_0) - mg(l_0 - a)$$

De C à D, il y a conservation de l'énergie mécanique, en D la vitesse est nulle :

$$-mg(l_0 - a)\cos\theta_1 = mg\frac{(l_0 + a)^3}{(l_0 - a)^2}(1 - \cos\theta_0) - mg(l_0 - a)$$

$$1 - \cos\theta_1 = \left(\frac{l_0 + a}{l_0 - a}\right)^3 (1 - \cos\theta_0)$$

Ou plus simplement, avec les sinus :

$$\sin^2\frac{\theta_1}{2} = \left(\frac{l_0 + a}{l_0 - a}\right)^3 \sin^2\frac{\theta_0}{2}$$

On pose : $k = \left(\frac{l_0 + a}{l_0 - a}\right)^3$. On peut calculer l'amplitude atteinte après n demi-périodes :

$$\sin^2\frac{\theta_n}{2} = k^n \sin^2\frac{\theta_0}{2}$$

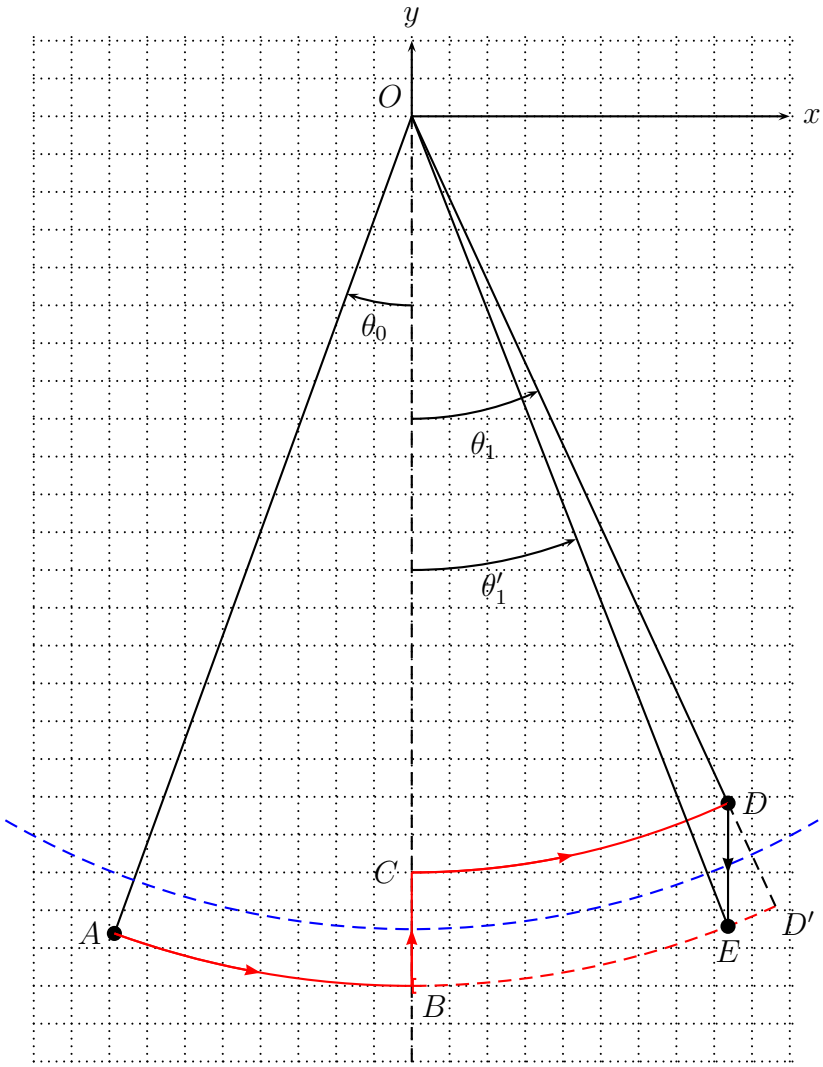
Si l'on veut tenir compte du signe, on écrira :

$$\sin\frac{\theta_n}{2} = (-1)^n k^{\frac{n}{2}} \sin\frac{\theta_0}{2}$$

Ainsi, au bout de 10 demi-périodes, l'amplitude vaut : -90.33 degrés.

Pour l'encensoir du Botafumeiro, l'amplitude maximale (82°) est atteinte au bout de 17 demi-périodes. Cette différence s'explique, évidemment par les frottements.

Cependant, le problème ne semble pas aussi simple. En D, le pendule est lâché et sa longueur passe instantanément de $l_0 - a$ à $l_0 + a$. Ceci est un point très délicat se représenter. Si on admet que les tireurs n'exercent plus aucune action sur la corde, le pendule qui est sans vitesse en D doit effectuer une chute libre, et on peut imaginer que lorsque la longueur de la corde atteint $(l_0 + a)$, les tireurs, instantanément, exercent une action pour maintenir cette longueur constante jusqu'au passage par la verticale.



Un calcul géométrique simple donne : $\theta'_1 = \arcsin\left(\dfrac{l_0 - a}{l_0 + a}\sin\theta_1\right)$.

$\theta'_1 = 21.33°$, pour $\theta_1 = 24,73°$.

Il faut donc considérer qu'au point E, le pendule possède une vitesse tangentielle, qui est la projection sur la tangente de la vitesse acquise lors de la chute de D à E. Par contre son énergie potentielle est plus petite ($\theta'_1 < \theta_1$). On peut se demander si la diminution de l'énergie potentielle est compensée par l'augmentation de l'énergie cinétique ? On peut remarquer que la hauteur de chute DE est plus grande que la variation totale de la longueur de la corde $2a$ et qu'elle augmente avec l'amplitude.

Énergie cinétique acquise lors de la chute verticale de D à E, sans vitesse initiale, en appliquant le principe de conservation de l'énergie, le fil n'est pas tendu. $\mathcal{E}_{CE} = mgh_{DE}$ avec

$h_{DE} = (l_0 + a)\cos\theta_1' - l_0\cos\theta_1$. On en déduit la vitesse :

$$v_E = \sqrt{2g\Big((l_0 + a)\cos\theta_1' - l_0\cos\theta_1\Big)}$$

Le pendule décrivant alors une trajectoire circulaire, on tiendra ne compte que la composante tangentielle de la vitesse :

$$v_t = v_E \sin\theta_1'$$

L'énergie mécanique en E vaut :

$$\mathcal{E}_m(E) = \frac{1}{2}mv_t^2 - mg(l_0 + a)\cos\theta_1'$$

On remplace :

$$\mathcal{E}_m(E) = mg\Big((l_0 + a)\cos\theta_1' - l_0\cos\theta_1\Big)\sin{\theta_1'}^2 - mg(l_0 + a)\cos\theta_1'$$

Comparons cette énergie à celle obtenue en supposant que le fil passe, instantanément, de D à D' en conservant une vitesse nulle (ce qui est paradoxal, mais c'est la schéma adopté dans les exemples cités).

$$\mathcal{E}_m(D') = -mg(l_0 + a)\cos\theta_1$$

Faisant une application numérique avec les données réelles de l'encensoir, pour une valeur arbitraire de θ_1, par exemple 60°. $\theta_1' = 48.85°$. On prend pour masse $m = 50$ kg. On trouve :

$\mathcal{E}_m(D') \simeq -5635$ J et $\mathcal{E}_m(E) \simeq -6200$ J, soit en pourcentage 10%. Est-ce une erreur raisonnable ? En se rappelant que dans cette étude on ne tient pas compte des frottements, on peut répondre par l'affirmative et la méthode adoptée par les exemples a l'avantage de la simplicité.