1 Le Botafumeiro – un oscillateur paramètrique

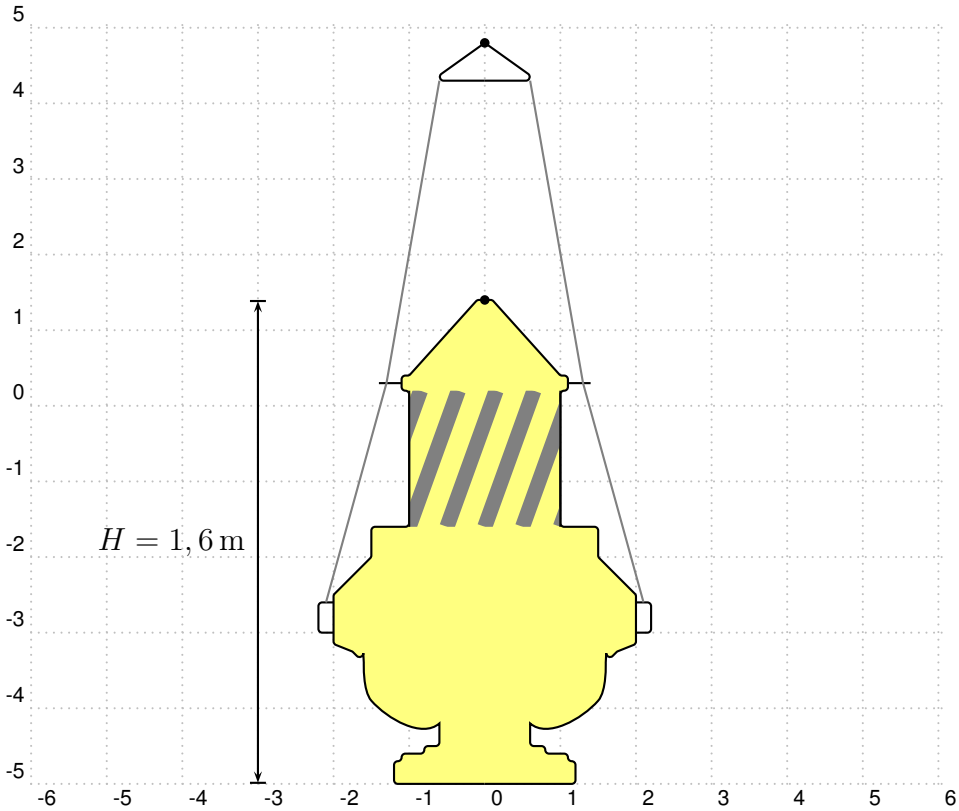
« Suspendu par une corde attachée au haut de la croisée de la cathédrale, l'encensoir gigantesque est dévié, d'une poussée, de sa position de repos verticale. Pendant qu'il se balance, huit hommes tirent sur une corde qui soulève l'encensoir lorsque celui-ci passe par la verticale et relâchent la corde quand l'encensoir est au plus haut. Les tireurs, sous les ordres d'un conducteur, amplifient ainsi les oscillations de l'encensoir, jusqu'à ce que celui-ci monte à une hauteur de 21 mètres, décrive un arc de 65 mètre de longueur, et passe en vrombissant à la vitesse de 68 kilomètres à l'heure en un point situé à ras du sol.[1] »

« ... le dispositif actuel a, en son centre, deux tambours de châtaignier, de 58 centimètres et 29 centimètres de diamètre, dont l'axe commun repose sur la carcasse métallique. ... L'encensoir actuel est en laiton argenté. »

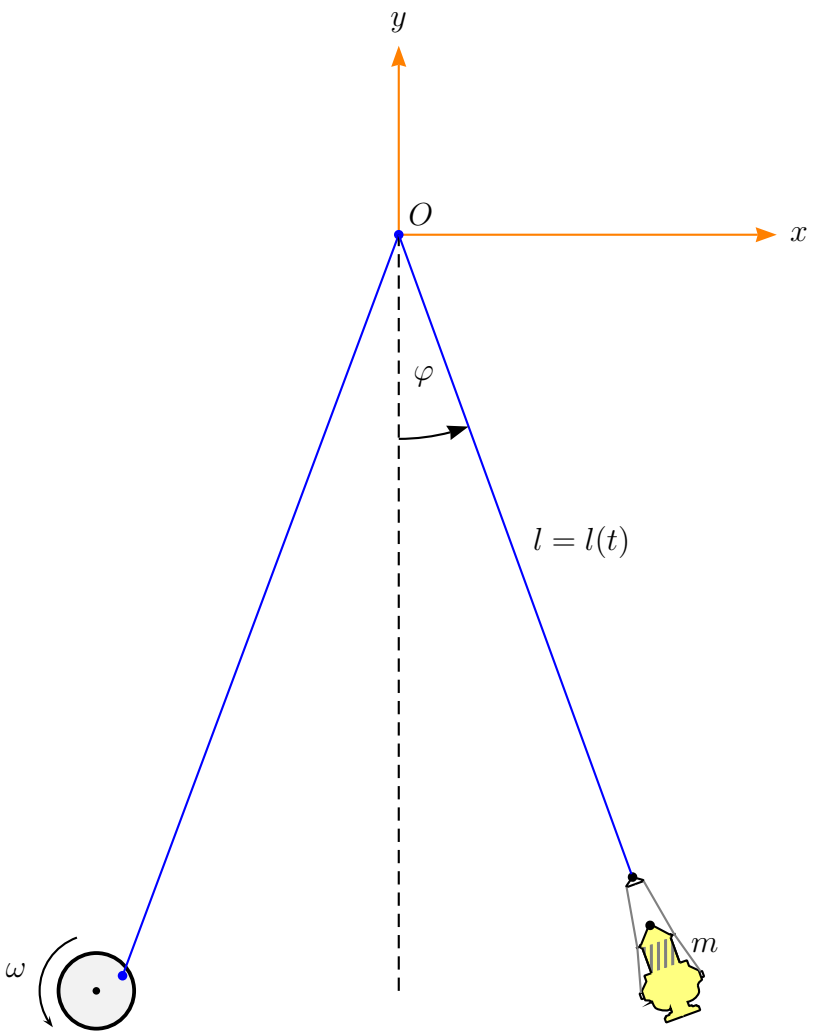
« La corde dont une extrémité est dans les mains des tireurs s'enroule d'abord autour du tambour de petit diamètre, puis autour du tambour de grand diamètre, et redescend vers le sol ; la seconde extrémité est nouée à l'encensoir. Quand l'encensoir et la corde passent par la position verticale, les hommes tirentsur l'autre extrémité de la corde qui fait tourner le petit tambour de plus d'un tour et demi, lequel entraîne le grand tambour et la même corde soulève ainsi l'encensoir d'environ trois mètres. Ce dispositif à double tambour amplifie les déplacements. Les tireurs relâchent la même longueur de corde lorsque l'encensoir atteint le point d'amplitude maximale. Après la poussée initiale, l'amplitude angulaire est d'environ 13 degrés. En 80 secondes et 17 demi-périodes d'oscillation de l'encensoir, l'amplitude maximale de 82 degrés est atteinte, l'encensoir atteignant un point situé à un demi-mètre sous la voûte. »

Une illustration expérimentale très simple est celle d'un pendule simple de longueur variable (donné par un tambour que tourne avec une vitesse angulaire ω constante).

[1] Cité d'un article "Pour la science" numéro 155, de Juan Sanmartin Losada – tous les citations sont de cette article.



Hauteur $H \approx$ 1,50-1,60 m
Masse $m \approx 54$ kg
Longueur de corde $l_0 \approx 30$ m
Amplitude $a \approx 2$ m (estimatif)



Les coordonnées de la masse m

$$x = l \sin \varphi$$
$$y = -l \cos \varphi$$

L'oscillation de la suspension ($a < l_0$):

$$l = l_0 + a \sin \omega t$$

Les derivées par rapport au temps :

$$\dot{x} = \dot{l} \sin \varphi + l\dot{\varphi} \cos \varphi$$
$$\dot{y} = -\dot{l} \cos \varphi + l\dot{\varphi} \sin \varphi$$
$$\dot{l} = a\omega \cos \omega t$$

L'énergie cinétique

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2}m(\dot{l}^2 + l^2\dot{\varphi}^2) \\ &= \frac{1}{2}ma^2\omega^2\cos^2\omega t + \frac{1}{2}m(l_0 + a\sin\omega t)^2\dot{\varphi}^2 \end{aligned}$$

L'énergie potentielle de pesanteur :

$$\begin{aligned} U &= mgy = -mgl\cos\varphi \\ &= -mg(l_0 + a\sin\omega t)\cos\varphi \end{aligned}$$

La fonction Lagrange :

$$\begin{aligned} L &= T - U \\ &= \frac{1}{2}ma^2\omega^2\cos^2\omega t + \frac{1}{2}m(l_0 + a\sin\omega t)^2\dot{\varphi}^2 + mg(l_0 + a\sin\omega t)\cos\varphi \end{aligned}$$

Pour φ, $\dot{\varphi}$, on recoit

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \varphi} &= -mg(l_0 + a\sin\omega t)\sin\varphi \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} &= m(l_0 + a\sin\omega t)^2\dot{\varphi} \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} &= 2m\omega\dot{\varphi}(l_0 + a\sin\omega t)\cos\omega t + m(l_0 + a\sin\omega t)^2\ddot{\varphi} \end{aligned}$$

Avec du frottement $F = \alpha v$ on a la fonction de dissipation

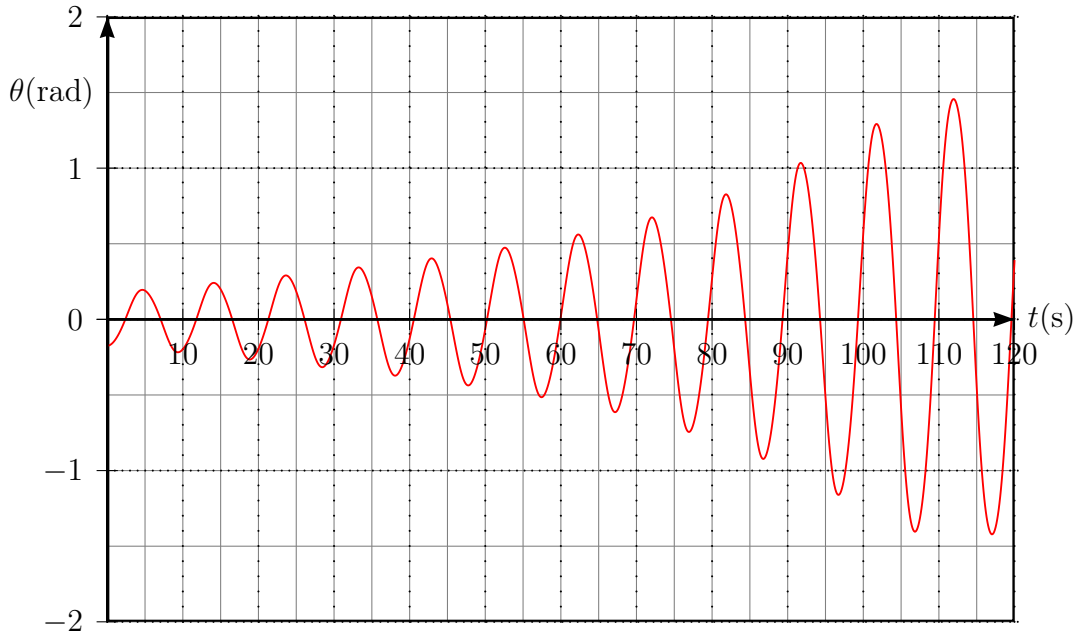
$$D = \int_0^v h(v)\,\mathrm{d}v = \int_0^v \alpha v\,\mathrm{d}v = \frac{1}{2}\alpha v^2 = \frac{1}{2}\alpha(a^2\omega^2\cos^2\omega t + (l_0 + a\sin\omega t)^2\dot{\varphi}^2)$$

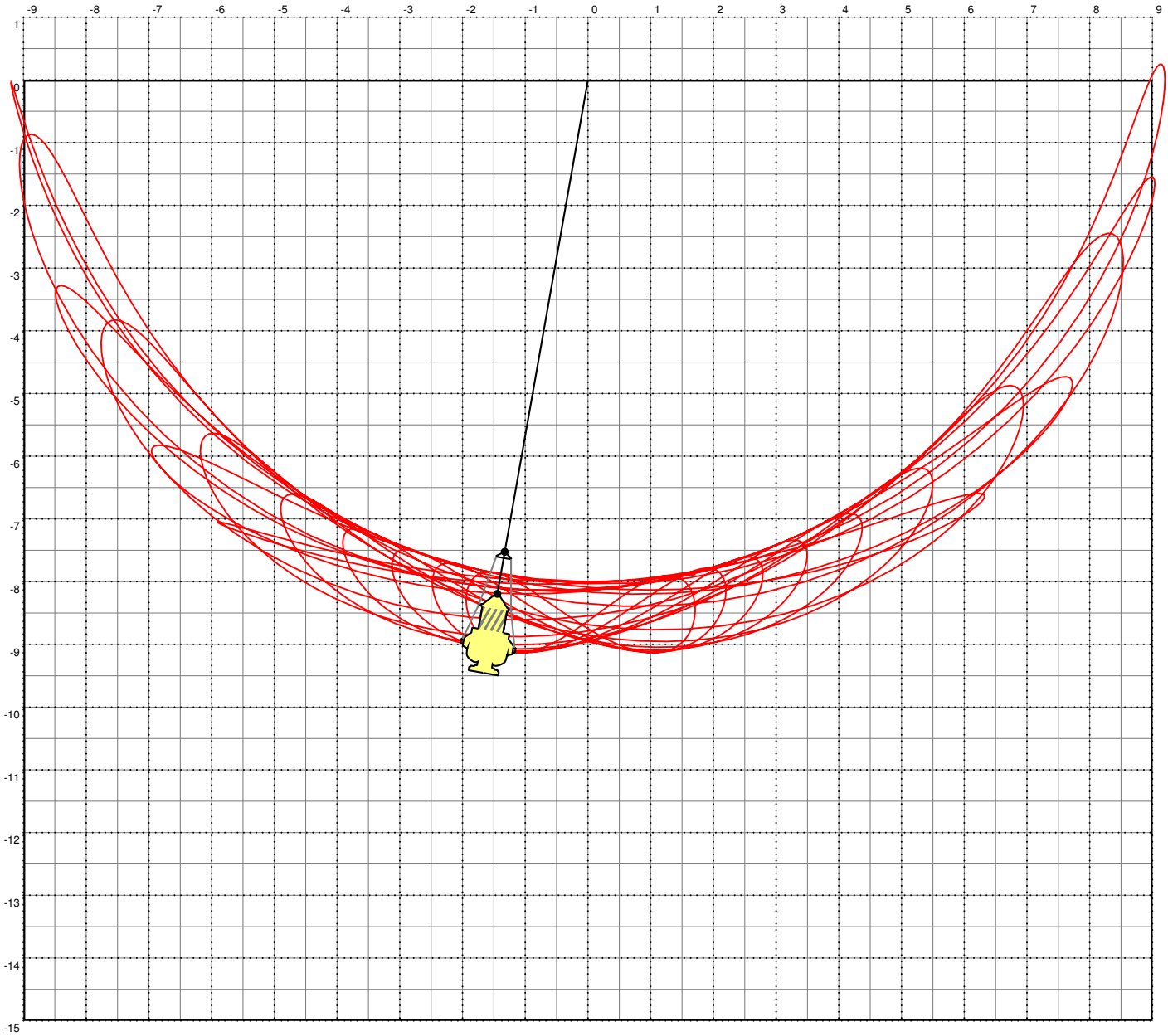
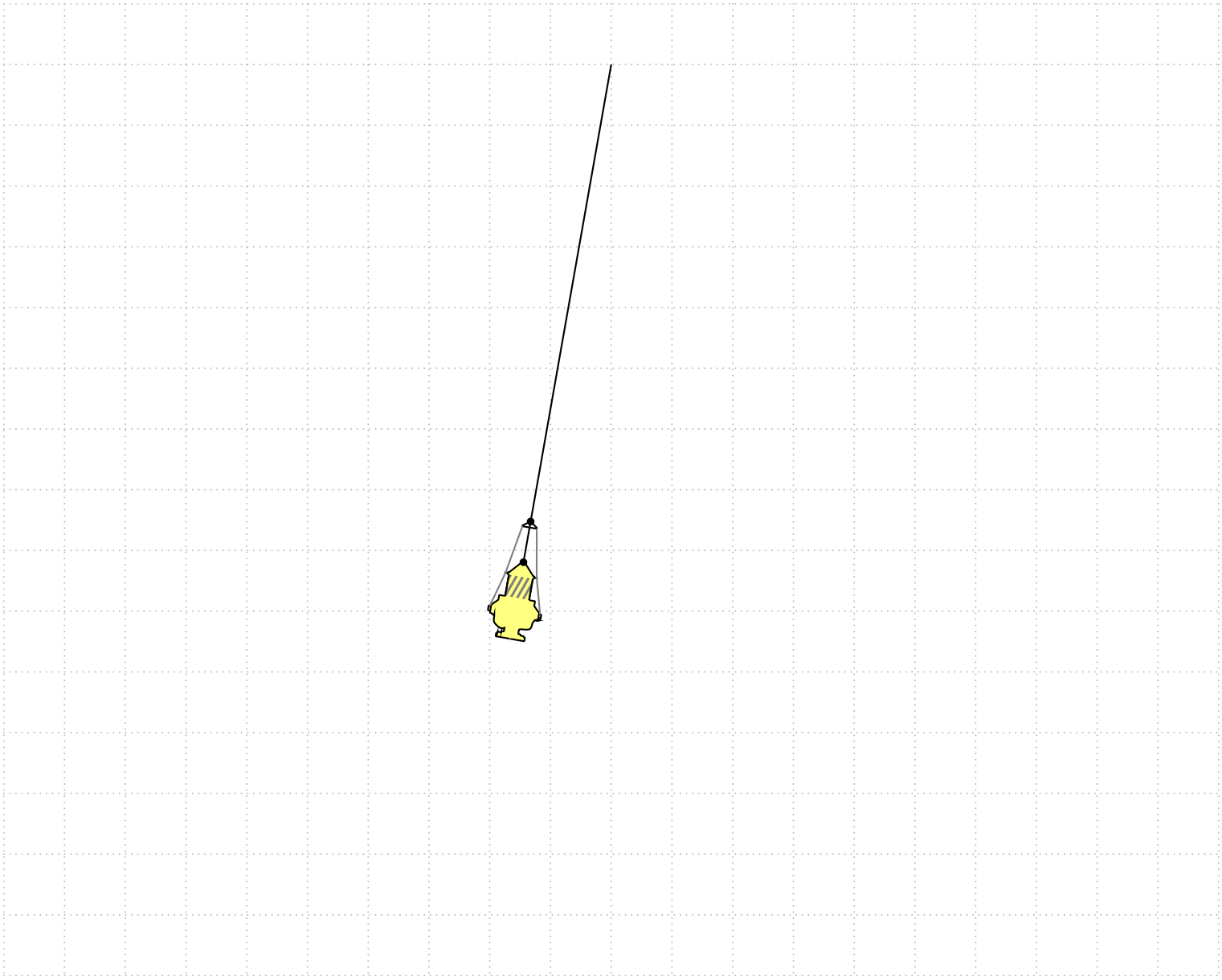
Le formalisme Lagrangienne donne:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\varphi}} = 0$$

L'équation différentielle :

$$\boxed{\ddot{\varphi} + \frac{\alpha}{m}\dot{\varphi} + \frac{2\omega\dot{\varphi}\cos\omega t + g\sin\varphi}{l_0 + a\sin\omega t} = 0}$$


2
θ(rad)
1
0
−1
−2
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
110
120
t(s)


-9
-8
-7
-6
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
-6
-7
-8
-9
-10
-11
-12
-13
-14
-15